**1-MAVZU**

**HODISALAR TURLARI. TASODIFIY HODISA. HODISALAR USTIDA AMALLAR. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. EHTIMOOLLIKNING KLASSIK, STATISTIK, GEOMETRIK TAʻRIFLARI. KOLMOGOROV AKSIOMALARI.**

1. **TASODIFIY HODISALAR.**
   1. **ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. HODISALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.**

Tasodifiy natijalarga ega bo‘lgan tajribalarni matematik jihatdan tasvirlash uchun, bizga birinchi navbatda qaralayotgan tajribaga mos keladigan **elementar hodisalar fazosi** tushunchasi zarur bo‘ladi. Elementar hodisalar fazosi tushunchasiga, geometriyada nuqta tushunchasi boshlang‘ich tushuncha bo‘lgani kabi, matematik jihatdan ta’rif berilmaydi u boshlang‘ich tushuncha hisoblanadi. Unga quyidagicha mazmun berish mumkin:

Elementar hodisalar fazosi deb, biror bir tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan o‘zaro kesishmaydigan shunday yakunlari to‘plami Ω ga aytiladiki, bizni qiziqtirgan tajribaning ixtiyoriy natijasini ushbu to‘plam elementlari orqali bir qiymatli yozish mumkin bo‘ladi.

**Ta’rif 1.** Tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha natijalarga **elementar hodisalar** deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi ikki turga bo‘linadi:

1. Chekli elementar hodisalar fazosi;
2. Cheksiz elementar hodisalar fazosi.

Mos ravishda cheksiz elementar hodisalar fazosi yana ikkiga bo‘linadi:

1. Sanoqli cheksiz elementar hodisalar fazosi;
2. Sanoqsiz cheksiz elementar hodisalar fazosi.

**Misol 1.** Tajriba bitta tanga tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω={gerb, raqam}={g, r}

**Misol 2.** Tajriba bitta o‘yin toshini tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

**Misol 3.** Tajriba bitta tangani gerb tushgancha tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω={g, gr, ggr, gggr, ggggr, ...}

**Misol 4.** Tajriba bitta nuqtani a dan b gacha bo‘lgan kesmaga tashlashdan iborat bo‘lsin.

Ω=[a, b] oraliqdan iborat bo‘ladi.

**Ta’rif 2.** Ω elementar hodisalar fazosining ixtiyoriy qism to‘plamiga **hodisa** deyiladi. Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan yoziladi: A, B, C, ...

**Ta‘rif 3.** Agar A ni tashkil etuvchi biror bir elementar hodisa ro‘y bersa **A hodisa ro‘y berdi** deyiladi va aksincha.

Hodisalar 3 turga bo‘linadi:

1. **Muqarrar hodisa** - Ω harfi bilan belgilanadi;
2. **Tasodifiy hodisa** – lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: A, B, C,...
3. **Mumkin bo‘lmagan hodisa** - kabi belgilanadi.

**Ta’rif 4.** Muayyan shart-sharoit bajarilganda aniq ro‘y beradigan hodisaga **muqarrar hodisa** deyiladi.

Masalan: yerni tortish kuchi borligi shartida (muayyan shart-sharoit) yuqoriga qarab tashlangan toshni qaytib yerga tushishi muqarrar hodisa bo‘ladi.

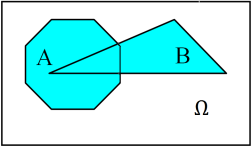
**Ta’rif 5.** Muayyan shart-sharoit bajarilganda ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisaga **tasodifiy hodisa** deyiladi.

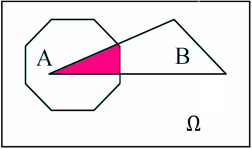
Masalan: Tekis sirtda (muayyan shart-sharoit) tashlangan tangada gerb tomon tushishi tasodifiy hodisa bo‘ladi.

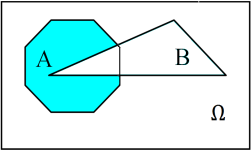
**Ta’rif 6.** Muayyan shart-sharoit bajarilganda umuman ro‘y bermaydigan hodisaga **mumkin bo‘lmagan hodisa** deyiladi.

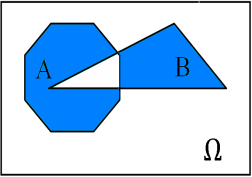
Masalan: yerni tortish kuchi borligi shartida (muayyan shart-sharoit) yuqoriga qarab tashlangan toshni havoda muallaq turib qolishi mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi.

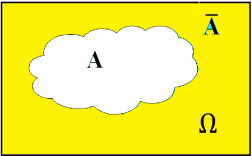
Hodisalar ham umuman olganda to‘plam bo‘lgani uchun ular ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish amallarini bajarish mumkin.

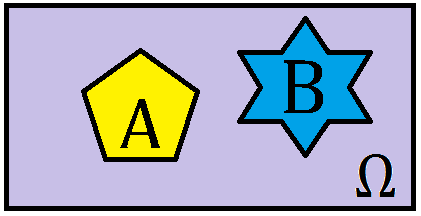
**Ta’rif 7.** A va B hodisalarning **birlashmasi** yoki **yig‘indisi** deb, ushbu hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi va **AB** kabi belgilanadi.

**Ta’rif 8.** A va B hodisalarning **ko‘paytmasi** yoki **kesishmasi** deb, ham A ga ham B ga tegishli bo‘lgan elementar hodisalardan iborat hodisaga aytiladi va **AB** kabi belgilanadi.

**Ta’rif 9.** A hodisadan B hodisaning **ayirmasi** deb, A hodisaning B hodisaga tegishli bo‘lmagan elementar hodisalardan iborat hodisaga aytiladi va **A\B** kabi belgilanadi.

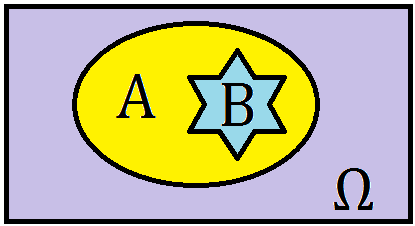
**Ta’rif 10.** A va B hodisalarning **simmetrik ayirmasi** yoki **halqali yig‘indisi** deb, A hodisani B hodisaga, B hodisani A hodisaga tegishli bo‘lmagan elementar hodisalaridan iborat hodisaga aytiladi va **AB** yoki **AB** kabi belgilanadi.

**Ta’rif 11.** Agar A hodisa ro‘y berganda ro‘y bermaydigan, A hodisa ro‘y bermaganda esa ro‘y beradigan hodisaga A ga qarama-qarshi hodisa yoki A ni to‘ldiruvchisi deyiladi va  kabi belgilanadi.

**Ta’rif 12.** Bitta sinashda birining ro‘y berishi qolganlarining ro‘y berishini yo‘qqa chiqaradigan hodisalarga **birgalikda bo‘lmagan hodisalar** deyiladi. ( AB= bo‘lsa)

**Ta‘rif 13.** Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro‘y berishi muqarrar hodisa bo‘lsa, u holda bu hodisalar **yagona mumkin bo‘lgan hodisalar** deyiladi.

**Ta‘rif 14.** Agar ikkita hodisadan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligiga bog‘liq bo‘lmasa bu hodisalar **erkli hodisalar** deyiladi.

**Ta’rif 15.** O‘zaro birgalikda bo‘lmagan () hodisalar uchun bo‘lsa, hodisalar **to‘la guruhni tashkil etadi** deyiladi.

**Ta’rif 16.** Agar A hodisaning har bir ro‘y berishi natijasida B hodisa ham ro‘y bersa, u holda **A hodisa B hodisani ergashtiradi** deyiladi va **AB** kabi belgilanadi.

**Ta’rif 17.** Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan ro‘y berishi mumkinroq deyishga asos bo‘lmasa, ular **teng imkoniyatli hodisalar** deyiladi.

Aytaylik to‘plam to‘plamning barcha to‘plam ostilari to‘plami bo‘lib, quyidagicha shartlarni bajarsin:

1. Agar A va B bo‘lib, bo‘lsa,
2. Agar A va B bo‘lib, bo‘lsa,
3. Agar A bo‘lib, bo‘lsa,

u holda to‘plam **hodisalar algebrasi** deyiladi.

**Eslatma:**

1. Yanada aniqroq yondashilganda 1) yoki 2) xossalarning bittasi kifoya, chunki ularning bittasi ikkinchisidan kelib chiqadi: = yoki ;
2. Qo‘shish yoki ko‘paytirish amallarini sanoqli sondagi hodisalar to‘plamigacha kengaytirilganda hodisalar algebrasi **borel algebrasi** yoki **algebra** deyiladi:

Yani uchun , yoki

**Nazorat topshiriqlari**

1. Quyidagi hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar bo‘ladimi?
2. Tajriba- ikkita tangani tashlashdan iborat. Hodisa:

**A**-ikkilasida gerb tushdi, **B**-ikkalasida ham raqam tushdi.

1. Tajriba- nishonga qarata uchta o‘q uzildi. Hodisa:

**A-**hech bo‘lmasa bitta o‘q tegdi, **B-**hech bo‘lmasa bitta o‘q tegmadi.

1. Tajriba- ikkita o‘yin toshini tashlashdan iborat. Hodisa:
2. Hech bo‘lmasa bitta toshda uch ochko tushdi,
3. Har bir toshda juft ochko tushdi.
4. Tajriba- oq va qora sharlari bor qutidan ikkita sharni olishdan iborat. Hodisa:
5. Ikkita oq shar olingan; B – ikkala shar ham bir xil rangda.
6. Tajriba – ikkita lotoreya chiptasini olishdan iborat. Hodisa:

A – ikkala chipta ham yutadi; B – hech bo‘lmaganda bitta lotoreya yutadi; C – faqat bitta lotoreya yutadi.

1. Tajriba – lift 10 ta passajir bilan ko‘tarilayapti va 5 ta qavatda to‘xtaydi. Hodisa:

A – birinchi to‘rtta to‘xtashda ko‘pi bilan 9 kishi tushdi;

B – oxirgi to‘xtashda hech bo‘lmasa bitta odam tushdi.

1. Quyidagicha hodisalar to‘la guruhni tashkil qiladimi:
2. Tajriba – nishonga qarata ikkita o‘q uzildi. Hodisalar:

A – nishonga ikkala o‘q ham tegdi; B – hech bo‘lmaganda bitta o‘q nishonga tegmagan.

1. Tajriba – ikkita o‘yin toshini tashlashdan iborat. Hodisa:

A – tushgan ochkolar yig‘indisi 3 dan katta;

B – tushgan ochkolar yig‘indisi 3 ga teng.

1. Tajriba – 4 dona urug‘lik ekildi. Hodisa:

A – bitta urug‘ unib chiqdi; B – ikkita urug‘unib chiqdi; C – uchta urug‘ unib chiqdi; D – to‘rtta urug‘ unib chiqdi.

1. Xaridor uchta do‘konga kiradi. Hodisa:

A – xaridor hech bo‘lmasa bitta do‘kondan tovar xarid qiladi;

B – xaridor birorta ham do‘kondan tovar sotib olmaydi.

1. Quyidagi hodisalar teng imkoniyatli bo‘ladimi:
2. Tajriba - nishonga qarata o‘q uzildi. Hodisa:

A – o‘q nishonga tegdi; B – o‘q nishonga tegmadi.

1. Tajriba – ikkita o‘yin toshini tashlashdan iborat. Hodisa:

A – tushgan ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng;

B – tushgan ochkolar yig‘indisi 9 ga teng.

1. Tajriba – ikkita tangani tashlashdan iborat. Hodisa:

A – ikkita gerb tushdi; B – ikkita raqam tushdi; C – bitta gerb va bitta raqam tushdi.

* 1. **HODISA EHTIMOLLIGI.**

Tasodifiy hodisa tushunchasini kiritish uchun Ω ning qism toʻplamlaridan iborat boʻlgan va quyidagicha shartlarni bajaruvchi toʻplam tizimini kiritamiz:

1. Ω
2. A ekanligidan ekanligi kelib chiqsa,
3. ekanligidan , ekanligi kelib chiqsa,
4. ekanligidan ekanligi kelib chiqsa.

1), 2), 3) shartlar bajarilsa ga algebra, 1), 2), 4) shartlar bajarilsa ga algebra deyiladi. 3 yoki 4 –shartlarda koʻrish qiyin emaski faqat bitta munosabatni bajarilishini talab qilishning oʻzi kifoya, ikkinchisi birinchisidan kelib chiqadi ( ). algebraga ayrim hollarda **halqa** ham deyiladi, chunki unda dan chiqib ketmaydigan ikkita qoʻshish va koʻpaytirish amallari aniqlangan. Undan tashqari algebra **biri bor halqa** ham hisoblanadi, unda bir rolini Ω bajaradi, yaʼni va ixtiyoriy uchun

**Taʼrif 1.** Tasodifiy hodisa deb faqat va faqat ning elementiga aytiladi.

Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Bu tushunchaning bir necha xil taʼriflari mavjud

**Taʼrif 2.** Agar Ω elementar hodisalar fazosida shunday manfiy boʻlmagan

P( sonli funksiya berilgan boʻlib,

shart bajarilsa, **elementar hodisalar ehtimolligi** berilgan deyiladi. P funksiyaga Ω da **ehtimolliklar taqsimotini** beradi ham deyiladi.

**Taʼrif 3. (Ehtimollikning statistik taʼrifi)** Biror bir tajribada A hodisaning ehtimolligi aniqlanishi uchun tajriba seriyalari ketma-ketligi oʻtqazilayotgan boʻlsin, – *i-* seriyadagi tajribalar soni, *i-*seriyadagi tajribalarda A hodisa roʻy bergan tajribalar soni boʻlib, seriyadan-seriyaga tajribalar soni ortib borsin , u holda A hodisaning ehtimoli deb,

limit qiymatiga aytiladi. Ushbu limitning mavjudligi va yagonaligi katta sonlar qonuni va Bernulli teoremalaridan kelib chiqadi. Ushbu taʼrif hodisa ehtimolligini aniqlashning eng aniq yoʻli hisoblansada, amalda undan foydalanish juda mushkul, chunki biz cheksiz koʻp tajriba oʻtqazish, undan tashqari juda katta tajribalar sonida ham nisbat aynan qanday songa intilayotganini bir qiymatli aniqlash imkoniyatiga ega emasmiz.

**Taʻrif 4. (Ehtimollikning klassik taʼrifi)**

Quyidagicha 2 ta shart bajarilsin:

1. Elementar hodisalar fazosi Ω={ chekli boʻlsin,
2. Har bir elementar hodisa lar teng imkoniyatli, yaʼni , *i=1,…,n* boʻlsin, u holda A hodisaning ehtimoli deb,

nisbatga aytiladi, bunda *n*(A) yoki – A hodisaning roʻy berishiga qulaylik tugʻdiradigan elementar hodisalr soni, *n* yoki – roʻy berishi mumkin boʻlgan barcha elementar hodisalar soni.

**Taʼrif 5. (Elementar hodisalar fazosi sanoqli boʻlganda ehtimollik taʼrifi)**

1) Elementar hodisalar fazosi sanoqli–cheksiz Ω={ boʻlsin.

2) Har bir elementar hodisa larga manfiy boʻlmagan sonlar mos qoʻyiladiki, quyidagi qator yaqinlashuvchi va 1 ga teng

boʻlsin, u holda A hodisaning ehtimoli

teng boʻladi.

**Taʻrif 6. (Ehtimollikninng geometrik taʼrifi)** A hodisaning roʻy berishiga qulaylik tugʻdiruvchi soha oʻlchovining butun elementar hodisalar fazosi oʻlchovi nisbatiga **hodisaning geometrik ehtimolligi** aytiladi, yaʼni – soha oʻlchovi boʻlsa,

.

Agar soha qandaydir chiziq boʻlsa **uzunlik**, tekislikdagi soha boʻlsa **yuza**, fazodagi jism boʻlsa **hajm** boʻladi.

Ω – elementar hodisalar fazosida biror bir hodisalar algebrasini tashkil qiluvchi toʻplamlar tizimini koʻrib chiqaylik. < > - juftlikka **oʻlchovli fazo** deyiladi.

**Taʼrif 7. (Ehtimollikni taʼriflashda aksiomatik yondoshish)** < > -oʻlchovli fazoda aniqlangan ehtimollik deb, ning toʻplamlarida aniqlangan va quyidagicha xossalarga ega boʻlgan P sonli funksiyaga aytiladi:

1. Ixtiyoriy uchun ,
2. ,
3. Agar {A*i*} hodisalar ketma-ketligi shunday boʻlsaki, ,

boʻlganda va boʻlsa, u holda

natijada hosil boʻlgan <,P > uchlikka **ehtimollik fazosi** deyiladi, P ehtimollikka ayrim hollarda Ω da ehtimollar taqsimoti deb ham yuritiladi. 1,2,3-shartlarga **A.N.Kolmogorov aksiomalari** deyiladi.

U yoki bu eksperimentning matematik modelini yaratishdagi asosiy bosqich <,P > ehtimollik fazosini qurishdan iborat.

Ehtimollik xossalari:

1. Muqarrar hodisaning ehtimoli har doim birga teng.
2. Mumkin boʻlmagan hodisaning ehtimoli har doim nolga teng. P(

**Eslatma:** Biror bir hodisaning ehtimoli nolga teng boʻlsa, uni roʻy bermaydigan hodisa boʻlishi shart emas. P(A)=0 boʻlsa, A= boʻlishi shart emas, u roʻy beradigan hodisa ham boʻlishi mumkin.

1. muqarrar hodisa boʻlgani uchun,

P(A)+P(, P(

1. Ixtiyoriy A hodisaning ehtimoli
2. Agar boʻlsa, u holda
3. Ixtiyoriy A va B hodisalar uchun:
4. Ixtiyoriy sondagi hodisalar soni uchun ham quyidagi tengsizlik oʻrinli:

**2-MAVZU**

**SHARTLI EHTIMOL. HODISALARNING BOGʻLIQSIZLIGI. EHTIMOLLARNI QOʻSHISH VA KOʻPAYTIRISH TEOREMALARI. TOʻLA EHTIMOL VA BAYES FORMULALARI.**

**Taʼrif 1.** **Birgalikda boʻlmagan hodisalar** deb, bitta sinashda birining roʻy berishi qolganlarining roʻy berishini yoʻqqa chiqaradigan hodisalarga aytiladi.

**Teorema 1.** (**Birgalikda boʻlmagan hodisalar ehtimollarini qoʻshish teoremasi**) Birgalikda boʻlmagan ikkita hodisadan qaysinisi boʻlsa ham, birining roʻy berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yigʻindisiga teng:

P(AB)=P(A)+P(B)

**Natija.** Har ikkitasi birgalikda boʻlmagan bir nechta hodisalardan qaysinisi boʻlsa ham, birining roʻy berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yigʻindisiga teng:

**Taʼrif 2. Toʻla guruh** deb, sinashning yagona mumkin boʻlgan hodisalari toʻplamiga aytiladi.

**Teorema 2.** Toʻla guruhni tashkil etuvchi hodisalarning ehtimollari yigʻindisi birga teng:

**Teorema 3.** Qarama-qarshi hodisalarning ehtimollari yigʻindisi birga teng:

**Taʼrif 3.** Agar ikkita hodisadan birining roʻy berishi ikkinchisining roʻy berishi yoki roʻy bermasligiga bogʻliq boʻlmasa, bu hodisalar **erkli hodisalar** deyiladi.

**Teorema 4.** Ikkita erkli hodisaning birgalikda roʻy berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari koʻpaytmasiga teng:

**Natija.** Birgalikda bogʻliq boʻlmagan *n*ta erkli hodisalar koʻpaytmasining ehtimoli, ushbu hodisalar ehtimollari koʻpaytmasiga teng:

**Taʼrif 4.** A hodisa roʻy berganlik sharti ostida,B hodisaning **shartli ehtimolligi** deb

songa aytiladi.

**Teorema 5.** Ikkita bogʻliq hodisaning birgalikda roʻy berish ehtimoli, ulardan birining ehtimolini shu hodisa roʻy berdi degan farazda hisoblangan ikkinchi hodisaning shartli ehtimoli koʻpaytmasiga teng:

yoki

**Natija.** Bir nechta bogʻliq hodisalarning birgalikda roʻy berish ehtimoli, ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga koʻpaytmasiga teng, bunda har bir keyingi hodisaning ehtimoli undan oldingi hamma hodisalar roʻy berdi degan farazda hisoblanadi:

Bunda - hodisaning hodisalar roʻy berdi degan farazda hisoblangan ehtimoli.

**Teorema 6.**  hodisalardan kamida bittasining roʻy berish ehtimoli bir bilan ,…, teskari hodisalar koʻpaytmasi ehtimolining orasidagi ayirmaga teng:

=

**Natija 1.** Birgalikda bogʻliq boʻlmagan hodisalardan kamida bittasining roʻy berish ehtimoli bir bilan ,…, teskari hodisalar ehtimollarining koʻpaytmasi orasidagi ayirmaga teng:

=*1-*

**Natija 2.** Agar hodisalarning roʻy berish ehtimollari bir xil boʻlsa, yaʼni boʻlsa, u holda ularning hech boʻlmaganda bittasining roʻy berish ehtimoli

teng boʻladi.

**Teorema 7.** Toʻla guruhni tashkil etuvchi birgalikda boʻlmagan hodisalardan bittasining roʻy berganlik shartidagina roʻy beradigan A hodisaning ehtimoli shu hodisalardan har birining ehtimolini A hodisaning mos shartli ehtimoliga koʻpaytmalari yigʻindisiga teng:

Bu formulaga “Toʻla ehtimollik formulasi”, -hodisalarga taxminlar deyiladi.

**Teorema 8.** A hodisa toʻla guruhni tashkil etuvchi, birgalikda boʻlmagan hodisalarning biri roʻy berishi shartidagina roʻy berishi mumkin boʻlsin. Agar A hodisa roʻy bergan boʻlsa, u holda *Bi* taxminning shartli ehtimolligi:

, *i=*1,2,…,*n*

Taxminlar formulasi yoki Bayes formulasi orqali topiladi. Ushbu formula taxminlar ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

3-MAVZU

**BOGʻLIQSIZ TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI. MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL TEOREMALARI. PUASSON TEOREMASI.**

Agar bir nechta sinash oʻtqazilayotgan boʻlib, har bir sinashda A hodisaning roʻy berish ehtimoli boshqa sinash natijalariga bogʻliq boʻlmasa, u holda bunday sinashlar A hodisaga nisbatan **erkli** deyiladi.

Har xil erkli sinashlarda A hodisa yoki har xil ehtimolga, yoki bir xil ehtimolga ega boʻlishi mumkin.

1. **Oʻzgarmas shartlardagi tajribalarda.**
2. Aytaylik biror bir tajriba oʻzgarmas shartlar ostida n marta takrorlanayotgan boʻlsin, va ularning har birida A hodisa P(A)=p ehtimollik bilan roʻy berishi yoki P()=1-p=q ehtimollik bilan roʻy bermasligi mumkin boʻlsin, u holda n ta sinashda A hodisaning roppa-rosa k marta roʻy berishi va n-k marta roʻy bermasligidan iborat boʻlgan murakkab hodisaning ehtimoli erkli hodisalar ehtimollarini koʻpaytirish teoremasiga koʻra:

*pqpqqqppp…p=pkqn-k*

ga teng. Bunday murakkab hodisalar soni esa n ta elemenrdan k tadan guruhlashlar soniga teng. Bunday murakkab hodisalar birgalikda boʻlmaganligi uchun, birgalikda boʻlmagan hodisalar ehtimollarini qoʻshish teoremasiga koʻra, izlanayotgan ehtimol barcha mumkin boʻlgan murakkab hodisalar ehtimollarining yigʻindisiga teng boʻladi.

**Teorema.** Har birida hodisaning roʻy berish ehtimoli p (0<p<1) ga teng boʻlgan n ta erkli sinashda hodisaning qaysi tartibda boʻlishidan qatʼiy nazar roppa-rosa k marta roʻy berish ehtimoli

teng boʻladi. Ushbu formulaga **Bernulli formulasi** deyiladi. Bernulli formulasiga olib keladigan shartlarga esa, **takrorlanuvchi bogʻliq boʻlmagan tajribalar ketma-ketligi xususiy sxemasi** yoki **Bernulli sxemasi** deyiladi. ehtimolliklar k ning turli qiymatlarida Nyuton binomi yoyilmasidagi qoʻshiluvchilarni bergani uchun:

ehtimolliklar taqsimoti () **binomial taqsimot** deyiladi.

1. Agar har birida roʻy berish ehtimoli ***p*** ga teng boʻlgan bogʻliq boʻlmagan tajribalar ketma-ketligi A hodisa ***k*** marta roʻy bergancha oʻtqazilayotgan boʻlsa, u holda m ta omadsiz tajriba oʻtqazilgan bʻlish ehtimoli:

, *m*=0,1,2,…

formula bilan aniqlanadi. Mos ehtimollar taqsimoti esa manfiy binomial taqsimot deyiladi. (mumkin boʻlgan holatlar toʻplami cheksiz)

1. **Oʻzgaruvchan shartlardagi tajribalarda.**

Agar har bir bogʻliqsiz tajribalar ketma-ketligida A hodisaning roʻy berish ehtimoli turli xil boʻlsa, (**takrorlanuvchi bogʻliq boʻlmagan tajribalar ketma-ketligi umumiy sxemasi)** u holda A hodisaning n ta tajribada k marta roʻy berish ehtimolli quyidagicha polinomning k-darajasi oldidagi koeffitsiyent sifatida aiqlanadi:

Bu yerda -ga **ishlab chiqaruvchi funksiya** deyiladi.

1. **Bir nechta hodisalar bilan tajriba.**

Agar tajriba natijasida birgalikda boʻlmagan va toʻla guruhni tashkil etuvchi A1, A2,…, AL hodisalarning bittasi roʻy berishi mumkin boʻlib, bunda P(A1)=p1,…, P(AL)=pL va boʻlsa, u holda A1 hodisani k1 marta, A2 hodisani k2  marta, …, AL hodisani kL marta roʻy berish ehtimoli:

formula bilan aniqlanadi. Mos ehtimollar taqsimotiga **polynomial taqsimot** deyiladi.

**Misol:** Biror bir moʻljalga qaratib uchta oʻzaro bogʻliq boʻlmagan oʻq otildi. Har bir otishda oʻqni nishonga tegish ehtimollari turli xil boʻlsin p1=0.7, p2=0.8, p3=0.9. Nishonga tegmaslik, 1, 2, 3 ta oʻqni nishonga tegish ehtimollari topilsin.

U holda nishonga tegmaslik ehtimoli

Bitta oʻqni nishonga tegish ehtimoli

Ikkita oʻqni nishonga tegish ehtimoli

Uchta oʻqni nishonga tegish ehtimoli

Har birida A hodisaning roʻy berish ehtimoli ***p*** ga teng boʻlgan ***n*** ta erkli sinash oʻtqazilayotgan boʻlsin. Agar tajribalar soni n yetarlicha katta va ***p*** yoki ***p*** boʻlsa, u holda Bernulli formulasi ish bermaydi.

Masalan: n=100, p=0.01, q=1-p=0.99, k=30 boʻlganda

-? Murakkab hisoblashlarga olib keladi. Bunday hollarda asimptotik (taqribiy) formulalarga oʻtiladi. *n\*p*= koʻpaytma oʻzgarmas boʻlsin, degan shart ostida Bernulli formulasida quyidagicha shakl almashtirish bajaramiz:

*n\*p*= boʻlgani uchun boʻladi. Demak,

n juda katta qiymatga ega ekanligini nazarda tutib, ni oʻrniga ni topamiz. Bunda izlanayotgan ehtimolning taqribiy qiymati topiladi xolos.

Shunday qilib, quyidagicha teoremaga keldik.

**Teorema (Puasson teoremasi).** Har birida hodisaning roʻy berish ehtimoli p (p<0.1) ga teng boʻlgan n ta erkli sinashda hodisaning qaysi tartibda boʻlishidan qatʼiy nazar roppa-rosa k marta roʻy berish ehtimoli, *npq*<10 boʻlganda

, bunda

boʻladi.

Bernulli sxemasi va Puasson formulalari iuchun quyidagilar oʻrinli:

Tajribalar soni n katta boʻlganda va har bir tajribada hodisaning roʻy berish ehtimoli 0<p<1 boʻlganda taqribiy asimptotik formulalarga oʻtiladi. Aytib oʻtish kerakki, xususiy holda, chunonchi boʻlganda asimptotik formulani 1730 yilda Muavr topgan edi. 1783 yilda esa Muavr formulasini Laplas 0 va 1 dan farqli ixtiyoriy p uchun umumlashtirgan. Shuning uchun quyidagi teorema Muavr-Laplas teoremasi deb ataladi.

**Muavr-Laplasning lokal teoremasi:** Har birida hodisaning roʻy berish ehtimoli p (0<p<1) ga teng boʻlgan n ta erkli sinashda hodisaning qaysi tartibda boʻlishidan qatʼiy nazar roppa-rosa *k* marta roʻy berish ehtimoli, *npq* boʻlganda

boʻladi. Bunda

1. ,(normal taqsimot zichlik funksiyasi) Laplas funksiyasi;
2. juft funksiya;
3. nuqtalar egilish nuqtalari;
4. qiymatlarda funksiya qiymatlari ilovalarda jadval koʻrinishida berilgan.
5. qiymatlarda boʻlgani uchun, qiymatlari nolga teng deb olinadi.

**Muavr-Laplasning integral teoremasi:** Har birida hodisaning roʻy berish ehtimoli p (0<p<1) ga teng boʻlgan n ta erkli sinashda, hodisaning kamida va koʻpi bilan marta roʻy berish ehtimoli, *npq* boʻlganda

boʻladi. Bunda

1. ,
2. , toq funksiya;
3. qiymatlarda funksiya qiymatlari ilovalarda jadval koʻrinishida berilgan.
4. qiymatlarda boʻlgani uchun, qiymatlari 0.5 teng deb olinadi.

Misol: 21 ta tajribaning har birida A hodisani roʻy berish ehtimoli 0.7 ga teng. A hodisani roppa-rosa 15 marta, koʻpchiligida, kamchiligida roʻy berish ehtimollari topilsin.

**4-MAVZU**

**DISKRET TASODIFIY MIQDORLARNING BERILISH USULLARI VA ULARNING SONLI TASNIFLARI.**

**Taʼrif 1.** Avvaldan nomaʼlum boʻlgan va oldindan inobatga olib boʻlmaydigan tasodifiy sabablarga bogʻliq boʻlgan hamda tajriba natijasida bitta mumkin boʻlgan qiymat qabul qiluvchi miqdorga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

**Taʼrif 2.** Ω elementar hodisalar fazosini haqiqiy sonlar toʻplamiga akslantiruvchi oʻlchovli funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar 3 turga boʻlinadi:

1. Diskret tasodifiy miqdorlar; (d.t.m) 2. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar; (u.t.m)
2. Singulyar tasodifiy miqdorlar. (s.t.m)

**Taʼrif 3.** Mumkin boʻlgan qiymatlari ayrim-ayrim sonlar boʻlib, ularni tayin ehtimollar bilan qabul qiladigan miqdorga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi.

Diskret tasodifiy miqqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari soni chekli yoki sanoqli-cheksiz boʻlishi mumkin. Diskret tasodifiy miqqdorlar 3 xil koʻrinishda berilishi mumkin:

1. Taqsimot qonuni. 2. Taqsimot koʻpburchagi. 3. Analitik koʻrinishda.

**Taʼrif 4.** D.t.m. ning qabul qiladigan qiymatlari va mos ehtimollari roʻyxatiga d.t.m ning **taqsimot qonuni** deyiladi.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | …. |  |
| P |  | …. |  |

Bunda ,

**Taʼrif 5.** Toʻgʻri burchakli koordinatalar tizimida , , …, nuqtalarni birin-ketin tutashtirishdan hosil boʻlgan siniq chiziqqa **taqsimot koʻpburchagi** deyiladi.

diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

analitik usulda yoki integral funksiya koʻrinishida ham berilishi mumkin. Tasodifiy miqdorlar ustida qoʻshish va koʻpaytirish amallarini bajarish mumkin.

**Taʼrif 6.**  va tasodifiy miqdorlarning yigʻindisi deb, va tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari yigʻindisi va mos ehtimollari koʻpaytmasidan iborat tasodifiy miqdorga aytiladi.

**Taʼrif 7.**  va tasodifiy miqdorlarning koʻpaytmasi deb, va tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari koʻpaytmasi va mos ehtimollari koʻpaytmasidan iborat tasodifiy miqdorga aytiladi.

Bu amallarda bir xil qiymatlarga ega boʻlgan tasodifiy miqdor qiymatlari bir marta yoziladi, mos ehtimollar esa qoʻshib qoʻyiladi.

Misol.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |  |  | -1 | 0 | 1 |
| P | 0.3 | 0.7 | P | 0.3 | 0.2 | 0.5 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1+(-1) | 1+0 | 1+1 | 2+(-1) | 2+0 | 2+1 |
| P | 0.3\*0.3 | 0.3\*0.2 | 0.3\*0.5 | 0.7\*0.3 | 0.7\*0.2 | 0.7\*0.5 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P | 0.09 | 0.27 | 0.29 | 0.35 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1\*(-1) | 1\*0 | 1\*1 | 2\*(-1) | 2\*0 | 2\*1 |
| P | 0.3\*0.3 | 0.3\*0.2 | 0.3\*0.5 | 0.7\*0.3 | 0.7\*0.2 | 0.7\*0.5 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| P | 0.21 | 0.09 | 0.2 | 0.15 | 0.35 |

Amaliy masalalarda tasodifiy miqdorni toʻlaligicha berishga ehtiyoj yoʻq. Koʻp hollarda taqsimotning ayrim sonli parametrlarini berish kifoya. Bunday sonli parametrlarga sonli xarakteristikalar (tasniflar) deyiladi. Bunday sonli tasniflarga **matematik kutilma, dispersiya, oʻrtacha kvadratik chetlanish, moda, mediana** va boshqalar kiradi.

1. **Matematik kutilma.**

**Taʼrif 8.**  d.t.m. ning **matematik kutilmasi** deb, uning mumkin boʻlgan barcha qiymatlarini mos ehtimollari koʻpaytmalari yigʻindisiga yoki d.t.m.ning oʻrtacha qiymatiga aytiladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari sanoqli cheksiz boʻlsa, u holda

Bunda tenglikning oʻng tomonida turgan qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi va barcha ehtimollar yigʻindisi birga teng.

Matematik kutilmaning **fizikaviy maʼnosi** shundaki taqsimot qonunini nuqtalarda qoʻyilgan ogʻirliklar deb faraz qilinsa, matematik kutilma ogʻirlik markazini topib beradi.

Matematik kutilma quyidagicha xossalarga ega:

1. M(C)=C, bu yerda C=const;
2. M(CC\*M
3. M(
4. Agar va tasodifiy miqdorlar erkli boʻlsa, u holda M(
5. Chetlanishning matematik kutilishi nolga teng: M(
6. **Dispersiya va uning xossalari.**

Tasodifiy miqdorning mumkin boʻlgan qiymatlarini uning oʻrtacha qiymati atrofida qanchalik tarqoqligini tasniflash uchun **dispersiya** xizmat qiladi.

**Taʼrif 9.** Tasodifiy miqdorni oʻzining matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga d.t.m.ning dispersiyasi deyiladi:

yoki

Dispersiyaning xossalari:

1. DC=0, c=const;
2. D(C;
3. Agar va lar erkli tasodifiy miqdorlar boʻlsa, D(
4. D(C+D

Dispersiya d.t.m.ning oʻrtacha kvadratik chetlanishini ifodalagani uchun, amaliyotda tarqoqlik tasnifi sifatida oʻrtacha kvadratik chetlanishdan foydalaniladi. Ushbu tasnif tasodifiy miqdor oʻlchovi bilan bir xil oʻlchovga ega boʻladi.

**Taʼrif 10.** Dispersiyadan olingan kvadrat ildizga oʻrtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

**Taʼrif 11.** Tasodifiy miqdorning eng kata ehtimolli qiymatiga, tasodifiy miqdorning modasi Mo deyiladi.

**Taʼrif 12.** D.t.m.ning **medianasi** deb, tasodifiy miqdorning shunday Me( qiymatiga aytiladiki, bunda

oʻrinli boʻladi. D.t.m. lar uchun odatda mediana aniqlanmaydi.

**5-MAVZU**

**UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLARNING BERILISH USULLARI VA ULARNING SONLI TASNIFLARI. BOSHLANGʻICH VA MARKAZIY MOMENTLAR.**

**Taʼrif 1.** Qabul qiladigan qiymatlari biror bir oraliqni toʻliq qoplaydigan miqdorga **uzluksiz tasodifiy miqdor** deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyasi yoki zichlik funksiyasi bilan berilishi mumkin.

**Taʼrif 2.** Har bir *x* qiymat uchun tasodifiy miqdorning *x* dan kichik qiymatni qabul qilish ehtimolini aniqlaydigan funksiyaga u.t.m. uchun **taqsimotning integral funksiyasi** deyiladi, (koʻpincha “integral funksiya” termini oʻrnida “taqsimot funksiya” terminidan foydalaniladi) yaʼni

Taqsimot quyidagicha xossalarga ega:

1. uchun , yaʼni taqsimot funksiya kamaymaydigan funksiya.
2. Agar u.t.m. boʻlsa, u holda
3. P(

=

1. Agar tasodifiy miqdorning mumkin boʻlgan qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli boʻlsa, u holda

boʻlganda

boʻlganda

1. Agar tasodifiy miqdorning mumkin boʻlgan qiymatlari butun x oʻqida joylashgan boʻlsa, u holda

**Taʼrif 3.** U.t.m. uchun **ehtimollar taqsimotining differensial funksiyasi** yoki **zichlik funksiyasi** deb, taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi, yaʼni

Zichlik funksiyaning xossalari:

1. , xususan u.t.m. (*a,b*) oraliqda aniqlangan boʻlsa boladi.
2. P(

**Taʼrif 4.** Mumkin boʻlgan qiymatlari butun OX oʻqqa tegishli boʻlgan u.t.m. ning matematik kutilishi deb,

integral qiymatiga aytiladi, xususan agar barcha mumkin boʻlgan qiymatlari (*a,b*) oraliqqa tegishli boʻlsa, u holda

Agar = mumkin boʻlgan qiymatlari butun OX oʻqqa tegishli boʻlgan tasodifiy argumentning funksiyasi boʻlsa, u holda

xususan agar barcha mumkin boʻlgan qiymatlari (*a,b*) oraliqqa tegishli boʻlsa, u holda

Matematik kutilishning d.t.m. lar uchun koʻrsatilgan barcha xossalari u.t.m. lar uchun ham oʻrinli hisoblanadi.

**Taʼrif 5.** Mumkin boʻlgan qiymatlari butun OX oʻqqa tegishli boʻlgan u.t.m. ning dispersiyasi deb,

tenglik bilan yoki bu tenglikka teng kuchli boʻlgan

tenglik bilan aniqlanadigan integralga aytiladi.

Xususan, agar barcha mumkin boʻlgan qiymatlar (*a,b*) oraliqqa tegishli boʻlsa, u holda

yoki

Dispersiyaning d.t.m. lar uchun koʻrsatilgan barcha xossalari u.t.m. lar uchun ham oʻrinli hisoblanadi.

Agar = berilgan tasodifiy argumentning funksiyasi boʻlsa, shu bilan birga mumkin boʻlgan qiymatlar butun OX oʻqqa tegishli boʻlsa, u holda

yoki

Xususan, agar barcha mumkin boʻlgan qiymatlar (*a,b*) oraliqqa tegishli boʻlsa, u holda

Yoki

**Taʼrif 6.**  Dispersiyadan olingan kvadrat ildizga

**oʻrtacha kvadratik chetlanish** deyiladi.

**Taʼrif 7.** Uzluksiz tasodifiy miqdorning Mo( modasi deb, uning shunday mumkin boʻlgan qiymatiga aytiladiki, bu qiymatga zichlik funksiyaning maksimumi mos keladi.

Mo(

**Taʼrif 8.** Tasodifiy miqdorning zichlik funksiya bilan chegaralangan yuzani teng ikkiga boʻluvchi qiymatiga Mediana Me() deyiladi.

Me(): P( Me())=P( Me())=

**Taʼrif 9.** Tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli boshlangʻich momenti** deb, tasodifiy miqdor k-darajasi matematik kutilmasiga aytiladi.

,

d.t.m. uchun:

u.t.m. uchun:

**Taʼrif 10.** Tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli markaziy nazariy momenti** deb, tasodifiy miqdor k-darajasi matematik kutilmasiga aytiladi:

d.t.m. uchun:

u.t.m. uchun:

Ravshanki, agar

k=1 boʻlsa, u holda - matematik kutilma, , k=2 boʻlsa, u holda – dispersiyani beradi.

Markaziy momentlar boshlangʻich momentlar orqali quyidagicha formulalar bilan ifodalanadi:

**6-MAVZU**

**AMALIYOTDA KOʻP UCHRAYDIGAN BAʼZI BIR DISKRET VA UZLUKSIZ TAQSIMOTLAR.**

I. Amaliyotda koʻp qoʻllaniladigan d.t.m.lar

**1. Bernulli taqsimoti:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *0* | *1* |
| P | *q* | *p* |

M; D-

**2. Binomial taqsimot uchun:**

M

D=

=

**3. Puasson taqsimoti uchun:**

=

II. Amaliyotda keng qoʻllaniladigan u.t.m.lar

1. **[a,b] oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor:**

**Taʻrif 1**. u.t.m. taqsimot funksiyasi

koʻrinishda boʻlsa, u.t.m.ga [a,b] da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Zichlik funksiyasi esa quyidagicha koʻrinishda boʻladi:

Matematik kutilmasi:

Dispersiyasi:

Oʻrtacha kvadratik chetlanishi:

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning ( oraliqqa tushish ehtimoli:

P(

1. **Koʻrsatkichli taqsimot.**

**Taʼrif 2.** Taqsimot funksiyasi quyidagicha koʻrinishda boʻlgan u.t.m.ga

bunda

**parametrli koʻrsatkichli taqsimlangan** uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Koʻrsatkichli taqsimotning taqsimot (integral) funksiyasi

koʻrinishda boʻladi.

Matematik kutilmasi:

Dispersiyasi:

Oʻrtacha kvadratik chetlanish:

u.t.m. ning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli:

Koʻrsatkichli taqsimot ommaviy xizmat koʻrsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyalarida katta rol oʻynaydi.

1. **Normal taqsimot qonuni.**

Ushbu taqsimot qonuni eng koʻp uchraydigan taqsimot qonuni boʻlib, uning muhim xususiyati shundaki u chegaraviy qonun boʻlib, maʼlum bir shartlar ostida boshqa qonuniyatlar aynan unga yaqinlashadi.

**Taʼrif 3.**  u.t.m. taqsimot funksiyasi

koʻrinishda boʻlsa, u.t.m.ga ***a* va parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor** deyiladi.

Ushbu u.t.m. ning zichlik (differensial) funksiyasi quyidagicha koʻrinishda boʻladi:

Normal taqsimotning sonlli tasniflari:

1. Matematik kutilma taqsimotning markazini tasniflaydi:
2. Dispersiya taqsimot shaklini tasniflaydi:

Normal taqsimot zichlik funksiyasining xossalari:

1. Aniqlanish sohasi: Qiymatlar sohasi:
2. OX oʻq – gorizontal asimptota,
3. nuqtalar egilish nuqtalari,
4. Maksimumi koordinatasi nuqtada,
5. Grafik *x=a* toʻgʻri chiziqqa nisbatan simmetrik,
6. Momentlari:

,

1. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli, taqsimot funksiyaning xossasiga koʻra aniqlanadi:

Bu yerda

normal qonunning taqsimot funksiyasi,

Laplas funksiyasi (qiymatlari jadvaldan topiladi).

Normal qoonuniyatning taqsimot funksiyasi quyidagicha xossalarga ega:

1. ;
2. ;

Berilgan chetlanish ehtimoli. Uch sigma qoidasi.

Normal taqsimotga ega boʻlgan tasodifiy miqdorni oʻzining matematik kutilmasi M =*a*  dan miqdordan katta boʻlmagan chetlanishga ega boʻlish ehtimolini topamiz:

yoki Laplas funksiyasidan foydalansak:

Normal taqsimotga ega boʻlgan tasodifiy miqdorni oʻzining matematik kutilmasi M =*a*  dan larga chetlanishlarini topamiz:

**Bundan esa uch sigma qoidasi kelib chiqadi:**Agar tasodifiy miqdor normal taqsimlangan tasodifiy miqdor boʻlsa, u holda ushbu tasodifiy miqdorni oʻzining matematik kutilmasidan chetlanishi absolyut qiymati boʻyicha oʻrtacha kvadratik chetlanishning uchlanganidan oshmaydi. Demak biror bir tasodifiy miqdor uchun uch sigma qoidasi oʻrinli boʻlsa, u holda bu tasodifiy miqdorni juda katta ehtimollik bilan normal taqsimlangan deyish mumkin ekan.

**Eslatma:** agar u.t.m matematik kutilmasi M=*a*  va dispersiyasi Dboʻlgan normal taqsimotga ega boʻlsa, u holda buni quyidagicha belgilashadi:

**7-MAVZU**

**KOʻP OʻLCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR VA ULARNING TAQSIMOT QONUNLARI.**

**KOVARIATSIYA MOMENTI VA KORRELYATSIYA KOEFFITSIYENTI.**

Shu vaqtga qadar mumkin boʻlgan qiymatlari bitta son bilan oʻlchanadigan tasodifiy miqdorlar qaralgan edi. Bunday miqdorlar bir oʻlchovli deb ataladi. Amaliyotda koʻp hollarda bir vaqtning oʻzida bir nechta son bilan oʻlchanadigan tasodifiy miqdorlarga duch kelish mumkin. Masalan ishlab chiqarilayotgan mahsulotning faqat uzunligi oʻlchansa bir oʻlchovli, ham uzunligi ham eni oʻlchansa ikki oʻlchovli, bir vaqtning oʻzida uzunligi, eni, balandligi oʻlchansa uch oʻlchovli va hokazo koʻp oʻlchovli tasodifiy miqdorlarga ega boʻlamiz.

Soddalik uchun ikki oʻlchovli tasodifiy miqdorlarni koʻrib chiqamiz.

Ikki oʻlchovli diskret tasodifiy miqdor (ning mumkin boʻlgan qiymatlari *(xi, yj)*- sonlar juftligi va ularning mos ravishda *p(xi, yj)* (*i*=1,2,...,n; *j*=1,2,...,m) ehtimollari roʻyxatiga ushbu miqdorning taqsimot qonuni deyiladi.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | .... |  | .... |  |
|  |  |  | .... |  | .... |  |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... | .... |
|  |  |  | .... |  | .... |  |
| .... | .... | .... | .... |  | .... | .... |
|  |  |  | .... |  | .... |  |

va tasodifiy miqdorlar ( ikki oʻlchovli tasodifiy miqdorlarning tashkil etuvchilari deyiladi. Birinchi ustunda tasodifiy miqdorning, birinchi satrda tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari keltirilgan. ustun va ustunlarning kesishgan joyida esa =P() ikki oʻlchovli tasodifiy miqdorning *(xi, yj)* qiymat qabul qilish ehtimolini koʻrsatadi. Shuni taʼkidlash joizki *(xi, yj)* hodisalar toʻliq guruhni tashkil etgani uchun:

=1.

Ikki oʻlchovli diskret tasodifiy miqdor (ning taqsimot qonunini bilsak, uni tashkil etuvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini topish mumkin.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | .... |  | .... |  |
| P |  | .... |  | .... |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | .... |  | .... |  |
| P |  | .... |  | .... |  |

**Taʼrif 2.** Ikki oʻlchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (ning **taqsimot funksiyasi** deb, ***x*** va ***y*** sonlarning har bir jufti uchun tasodifiy miqdorning ***x*** dan kichik qiymat qabul qilishi, tasodifiy miqdorning ***y*** dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini aniqlaydigan

funksiyaga aytiladi.

Geometrik nuqtai nazardan yuqoridagi tenglikni quyidagicha talqin qilish mumkin: funksiya ( tasodifiy miqdorning (tasodifiy nuqtaning) uchi (*x,y*) nuqtada boʻlgan va bu nuqtadan chapda va pastda joylashgan cheksiz kvadrantga tushish ehtimolini anglatadi.

funksiya xossalari:

1-xossa.

2-xossa. har qaysi argumenti boʻyicha kamaymaydigan funksiya, yaʼni

Agar boʻlsa, ,

Agar boʻlsa, boʻladi.

3-xossa. Quyidagicha limit munosabatlar oʻrinli:

1. , 2) , 3)

4)

4-xossa.

5-xossa.

6-xossa.

7-xossa.

8-xossa.

**Taʼrif 3.** ( ikki oʻlchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** deb, taqsimot funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

**Xossalari:**

**.**

**.**

**.**

**.**

**.**  uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi-

**.**  uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi-

**Kovariatsiya momenti**

Koʻp oʻlchovli diskret tasodifiy miqdor boʻlganda kovariatsiya momenti quyidagicha hisoblanadi:

yoki

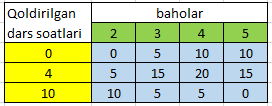
Koʻp oʻlchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar berilganda kovariatsiya koeffitsiyenti quyidagicha topiladi:

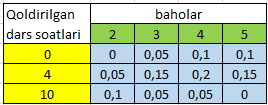
va tasodifiy miqdorlar erkli boʻlsa, kovariatsiya koeffitsiyenti nolga teng boʻladi. Ushbu kattalikning kamchiligi shundagi u va tasodifiy miqdorlarning oʻlchov birliklariga bogʻliq boʻladi, bu esa juda koʻp amaliy masalalarda noqulaylik tugʻdiradi. Oʻlchov birliklaridan qutulish uchun korrelyatsiya koeffitsiyenti kiritiladi.

**Korrelyatsiya koeffitsiyenti**

Xossalari:

1. va tasodifiy miqdorlar chiziqli bogʻlanmagan boʻladi.
2. va tasodifiy miqdorlar oʻrtasidagi bogʻliqlik yoʻnalishi teskari boʻladi.
3. va tasodifiy miqdorlar oʻrtasidagi bogʻliqlik yoʻnalishi bir xil boʻladi.
4. va tasodifiy miqdorlar oʻrtasidagi chiziqli bogʻliqlik mavjudligini anglatadi.

**Misol.** Talabalarning oʻzlashtirishi bilan ularni qoldirgan dars soatlari oʻrtasidagi korrelyatsiya koeffitsiyenti topilsin.

Ehtimollar yigʻindisi birga teng boʻlishi kerak edi, shuning uchun ham jadvaldagi talabalar sonini jami talabalar soniga boʻlsak quyidagi jadvalga ega boʻlamiz:

Korrelyatsiya koeffitsiyentini topish uchun va tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini topamiz;





=4\*2\*0.05+4\*3\*0.15+4\*4\*0.2+4\*5\*0.15+10\*2\*0.1+10\*3\*0.05+10\*4\*0.05=13.9

Demak korrelyatsiya koeffitsiyentining manfiyligi talabalarning oʻzlashtirishi bilan ularning dars qoldirishlari soni teskari bogʻlanganligidan dalolat beradi. Ular bir-biriga 48,8% bogʻliqliligini anglatadi.

**8-MAVZU**

**KATTA SONLAR QONUNI. MARKAZIY LIMIT TEOREMA. CHEBISHEV TENGSIZLIKLARI. ERKLI TASODIFIY MIQDORLAR KETMA-KETLIGI UCHUN KATTA SONLAR QONUNI. CHEBISHEV VA BERNULLI TEOREMALARI. BIR XIL TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN MARKAZIY LIMIT TEOREMA. LYAPUNOV TEOREMASI. LAPLAS TEOTEMASI.**

Эҳтимоллик ва статистика оммавий тасодифий борлиқларни ўрганадиган фан бўлиб, Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари тасодифийлик билан зарурат ўртасида боғлиқлик ўрнатади. Оммавий тасодифий борлиқларда пайдо бўладиган қонуниятларни ўрганиш келажакдаги тажрибалар натижаларини илмий жиҳатдан башорат қилиш имконини беради. Қаерда тасодифийлик бўлса, у ерда эҳтимоллар назарияси қонунлари ишлайди. Ижтимоий ҳаётимизнинг барча соҳаларида, айниқса иқтисодий кўрсаткичларни башорат қилишда, кузатилаётган тасодифий миқдорнинг тақсимоти кўриниши тўғрисидаги тахминларни илмий жиҳатдан текшириш ва етарлича эҳтимоллик (кафолат) билан тасдиқлаш йўлларини топиш фаннинг нақадар кенг спектрдаги масалаларни ечишда етарлича инструментларга эга эканлигини кўрсатади. Биржа савдолари, суғурта соҳасида эҳтимоллар назарияси усуллари беқиёс ҳисобланади. Техниканинг турли жабхаларида, айниқса дастурлаш технологияларида тасодифийликка боғлиқ бўлган дастурлар, масалан турли хил ўйинлар дастурида эҳтимоллар назарияси усулларидан кенг фойдаланилади.

* 1. **Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари мазмуни**

Эҳтимоллар назарияси лимит теоремалари иккита гуруҳга бўлинади, уларнинг биттаси катта сонлар қонуни деб ном олди, иккинчиси эса марказий лимит теоремалар деб ном олган. Катта сонлар қонуни айрим тасодифий миқдорларни уларнинг тақсимот қонунларидан қатъий назар маълум бир лимит қийматларга яқинлашиш саволларига тегишлидир. Марказий лимит теоремалар эса тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимотининг лимит қонунларига тегишли теоремаларни ўз ичига олади.

Катта сонлар қонуни деб ном олган теоремалар: Чебишев тенгсизлиги, Чебишев теоремаси, Бернулли теоремасини кўриб чиқамиз.

1. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ

Маълумки, тасодифий миқдор синаш якунида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки у ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча тасодифий сабабларга боғлиқ бўлиб, биз уларни хисобга ололмаймиз. Ҳар бир тасодифий миқдор ҳақида ана шу маънода жуда кам маълумотга эга бўлганимиз учун етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тўғрисида ҳам бирор нарса айта олишимиз қийиндек кўринади. Аслида эса бу ундай эмас. Бирор нисбатан кенг шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасодифийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан. Амалиёт учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳодисаларнинг қандай ривожланишини кўра билиш имконини беради. Бу шартлар умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Булар жумласига Чебишев ва Бернулли теоремалари мансуб, Чебишев теоремаси катта сонлар қонунининг энг умумийси, Бернулли теоремаси эса энг соддасидир. Бу теоремаларнинг исботида Чебишев тенгсизлигидан фойдаланилади.

2. ЧЕБИШЕВ ТЕНГСИЗЛИГИ

Чебишев тенгсизлиги дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ўринли. Соддалик учун бу тенгсизликни дискрет миқдорлар учун исботлаймиз.

Тақсимот жадвали (қонуни) билан берилган Х дискрет тасодифий миқдорни қараймиз:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х | *х*1 | *х*2 | *....* | *x*n |
| Р | *p*1 | *p*2 | *....* | *p*n |

Тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши абсолют қиймат бўйича мусбат сондан ортмаслик эҳтимолини баҳолашни мақсад қилиб қўяйлик. Агар етарлича кичик бўлса, биз бу билан тасодифий миқдор ўзининг математик кутилишига яқин қиймат қабул қилиш эҳтимолини баҳолаган бўламиз. П.Л.Чебишев бизни қизиқтираётган баҳони берувчи тенгсизликни исботлаган.

**Чебишев тенгсизлиги.** Х тасодифий миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши абсолют қиймат бўйича мусбат сондан кичик бўлиш эҳтимоли дан кичик эмас:

Исботи. ва тенгсизликларнинг бажарилишидан иборат бўлган ҳодисалар қарама-қарши бўлгани учун уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг, яъни

)+Р(

Бундан бизни қизиқтираётган эҳтимол:

)=1 (\*)

Кўриб турибмизки, масала эҳтимолни ҳисоблашга келтирилди.

Х тасодифий миқдор дисперсиясининг ифодасини ёзайлик:

Бу йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси манфий эмас.

Таркибида бўлган қўшилувчиларни ташлаб юборамиз, қолган қўшилувчилар учун бўлади. Натижада йиғинди фақат камайиши мумкин. Аниқлик учун биринчи k ta қўшилувчи ташлаб юборилган деб ҳисоблаймиз (умумийликка зиён келтирмасдан, тақсимот жадвалида мумкин бўлган қийматлар шу тартибда белгилаб чиқилган дейиш мумкин). Шундай қилиб,

( тенгсизликнинг иккала томони ҳам мусбат, шунинг учун уларни квадратга ошириб, тенг кучли тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бундан фойдаланиб ва қолган йиғиндидаги ҳар бир кўпайтувчини билан алмаштириб (бундан фақат тенгсизлик кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

(\*\*)

Қўшиш теоремасига кўра эҳтимоллар йиғиндиси Х тасодифий миқдор қийматларнинг қайсиниси бўлса, бирини қабул қилиш эҳтимоли бўлиб, уларнинг ҳар бирида ҳам четланиш тенгсизликни қаноатлантиради. Бундан йиғинди

Р(

эҳтимолни ифодалаши келиб чиқади. Бу мулоҳаза (\*\*) тенгсизликни бундай ёзишга имкон беради:

Р(

Ёки

Р( (\*\*\*)

(\*\*\*) ни (\*) га қўйиб, узил-кесил қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

Мана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Эслатма. Амалиёт учун Чебишев тенгсизлигиниг аҳамияти чекланган, чунки кўп ҳолларда у қўпол, баъзан эса тривиал (аҳамияти бўлмаган) баҳо беради. Масалан, агар , ва демак бўлса, у ҳолда ; шундай қилиб, бу ҳолда Чебишев тенгсизлиги четланишнинг эҳтимоли манфий эмаслигини билдиради, бу эса шундоқ ҳам равшан, чунки ҳар қандай эҳтимол манфий бўлмаган сон билан ифодаланади. Чебишев тенгсизлигини назарий аҳамияти эса жуда каттадир. Қуйида Чебишев теоремасини келтириб чиқариш учун шу тенгсизликдан фойдаланамиз.

**3.ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИ**

**Чебишев теоремаси**. Агар жуфт-жуфт эркли тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган (ўзгармас С сондан катта эмас) бўлса, у ҳолда мусбат сон ҳар қанча кичик бўлганда ҳам, тасодифий миқдорлар сони етарлича катта бўлса,

Тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Бошқача қилиб айтганда, теорема шартлари бажарилганда

Шундай қилиб, Чебишев теоремаси бундай даъво қилади: агар дисперсиялари чегараланган тасодифий миқдорларнинг етарлича кўп сондагиси қаралаётган бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорлар арифметик ўртача қийматининг уларнинг математик кутилишлари арифметик ўртача қийматидан четланиши абсолют қиймат бўйича исталганча кичик бўлишидан иборат ҳодисани деярли муқаррар деб ҳисоблаш мумкин.

Исботи. Янги тасодифий миқдор – тасодифий миқдорларнинг

Арифметик ўртача қийматини текширамиз.

нинг математик кутлишини топамиз. Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисдан ташқарига чиқариш мумкин; йиҳиндининг математик кутилиши қўшилувчиларнинг математик кутилишлари йиғиндисига тенг), қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

(\*)

тасодифий миқдорга Чебишев тенгсизлигини қўллаймиз:

(\*\*)

Дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб (ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб дисперсия белгиласидан ташқарига чиқариш мумкин; эркли тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси қўшилувчилар дисперсиялари йиғиндисига тенг), қуйидагини ҳосил қиламиз:

Шартга кўра ҳамда тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари С ўзгармас сон билан чегараланган, яъни

тенгсизликлар ўринли, шунинг учун

Шундай қилиб,

(\*\*\*)

(\*\*\*) нинг ўнг томонини (\*\*) га қўйиб, (бундан (\*\*) тенгсизлик фақат кучайиши мумкин), қуйидагини ҳосил қиламиз:

Бундан да лимитга ўтиб, қуйидагига эга бўламиз:

Ниҳоят, эҳтимол бирдан катта бўла олмаслигини ҳисобга олиб, узил-кесил бундай ёзишимиз мумкин:

Теорема исботланди.

Юқорида Чебишев теоремасини таъкидлашда, биз тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари ҳар хил деб фараз қилган эдик. Амалиётда эса кўпинча тасодифий миқдорлар бир хил математик кутилишга эга бўлади. Агар шунга қўшимча қилиб, бу тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса, у ҳолда бу миқдорларга Чебишев теоремасини қўллаш мумкинлиги равшан. Ҳар бир тасодифий миқдорнинг математик кутилишини *а* орқали белгилаймиз, қаралаётган ҳолда математик кутилишларнинг арифметик ўртачаси ҳам *а* га тенг бўлишини кўриш қийин эмас.

Биз энди қаралаётган хусусий ҳол учун Чебишев теоремасини таърифлашимиз мумкин.

Агар тасодифий миқдорлар жуфт-жуфт эркли ва бир хил математик кутилишга эга бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган бўлса, у ҳолда мусбат сон ҳар қанча кичик бўлганда ҳам тасодифий миқдорлар сони етарлича кўп бўлса,

тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.

Бошқача сўз билан айтганда, теореманинг шартлари бажарилганда

тенглик ўринли бўлади.

ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИНИНГ МОҲИЯТИ

Исботланган теореманинг моҳияти бундай: айрим эркли тасодифий миқдорлар ўз математик кутилишларидан анча фарқ қиладиган қийматлар қабул қилса-да, етарлича катта сондаги тасодифий миқдорларининг арифметик ўрта қиймати катта эҳтимоллик билан ўзгармас сонга, чунончи сонга (ёки хусусий ҳолда *а* сонга) яқин қийматларни катта эҳтимол билан қабул қилади. Бошқача сўз биланайтганда, айрим тасодифий миқдорлар анчагина сочилган бўлиши мумкин, лекин уларнинг арифметик ўрта қиймати кам тарқоқ бўлади.

Шундай қилиб ҳар бир тасодифий миқдор мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан айтиб бўлмайди, аммо уларнинг арифметик ўрта қиймати қандай қиймат қабул қилишини олдиндан кўра билиш мумкин.

Шундай қилиб, етарлича катта сондаги эркли тасодифий миқдорларнинг (дисперсиялари текис чегараланган) арифметик ўртача қиймати тасодифийлик характерини йўқотади. Бу бундай изоҳланади: ҳар бир миқдорнинг ўз математик кутилишидан четланиши мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин, аммо арифметик ўртача қийматда улар ўзаро йўқолиб кетади.

Чебишев теоремаси фақат дискрет тасодифий миқдорлар учун эмас, балки узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли.

ЧЕБИШЕВ ТЕОРЕМАСИНИНГ АМАЛИЁТ УЧУН АҲАМИЯТИ

Одатда бирор физикавий катталикни ўлчаш учун бир нечта ўлчашлар ўтказилади ва уларнинг арифметик ўртача қиймати изланаётган ўлчам сифатида қабул қилинади. Қандай шартларда бундай ўлчашусулини тўғри деб ҳисоблаш мумкин? Бу саволга Чебишев теоремаси (унинг хусусий ҳоли) жавоб беради.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар бир ўлчаш натижаларини тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу тасодифий миқдорар учун Чебишев теоремасини қўлламоқчи бўлсак қуйидагилар бажарилиши керак: 1) улар жуфт-жуфт эркли, 2) бир хил математик кутилишга эга, 3) уларнинг дисперсиялари текис чегараланган.

Агар ҳар бир ўлчаш натижаси қолганларининг натижаларига боғлиқ бўлмаса, биринчи талаб бажарилади.

Агар ўлчашлар систематик (бир хил ишорали) хатоларсиз бажарилса, иккинчи талаб бажарилади. Бу ҳолда ҳамма тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари бир хил бўлиб, у ҳақиқий ўлчам *а* га тенг бўлади.

Агар ўлчаш асбоби тайин аниқликни таъминлай олса, учинчи талаб бажарилади. Бунда айрим ўлчашларнинг натижалари ҳар хил бўлсада, уларни тарқоқлиги чегараланган бўлади.

Агар юқорида кўрсатилган ҳамма талаблар бажарилган бўлса, у ҳолда ўлчаш натижаларига Чебишев теоремасини қўллашга ҳақлимиз: *n* етарлича катта бўлганда

Тенгсизликнинг эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади. Бошқача қилиб айтганда, етарлича кўп сонда ўлчашлар ўтказилса, у ҳолда уларнинг арифметик ўртача қиймати ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматидан исталганча кам фарқ қилади.

Шундай қилиб, Чебишев теоремаси кўрсатилган ўлчаш усулини қўллаш мумкин бўладиган шартларни бажарилиши кераклигини кўрсатади.

Бироқ ўлчашлар сонини кўпайтириш билан исталганча аниқликка эришиш мумкин деб ўйлаш нотўғри бўлар эди. Гап шундаки, асбобнинг ўзи аниқликда кўрсатади; шунинг учун ҳар бир ўлчаш натижаси, ва демак уларнинг арифметик ўртача қиймати ҳам асбобнинг аниқлигидан ортмайдиган аниқликда ҳосил қилинади.

Статистикада қўлланиладиган танланма усул Чебишев теоремасига асосланган, бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, унда унча катта бўлмаган тасодифий танланмага асосланиб, барча текширилаётган объектлар тўплами (бош тўплам) тўғрисида мулоҳаза қилинади. Масалан, бир той пахтанинг сифати ҳақида ҳар ер-ҳар еридан олинган пахта толаларидан иборат тутамнинг сифатига қараб хулоса чиқарилади.Тутамдаги пахта толаларини сони тойдагидан анча кам бўлса ҳам, тутам етарлича кўп сондаги юзлаб толалардан иборатдир.

Бошқа мисол сифатида доннинг сифатини ундан озгинасини татиб кўришга асосланиб уни сифатини билиб олиш мумкин. Бу ҳолда ҳам таваккалига олинган донлар сони ҳамма дон сонидан анча кичик бўлсада, лекин ўз-ўзи учун етарлича кўп.

Мана шу келтирилган мисолларнинг ўзида. Чебишев теоремаси амалиёт учун бебаҳо аҳамиятга эга деб хулоса чиқариш мумкин.

**4.БЕРНУЛЛИ ТЕОРЕМАСИ**

*n* та эркли синаш ўтказилаётган бўлиб,уларнинг ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли *р* га тенг бўлсин. Ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси тахминан қандай бўлишини аввалдан кўра билиш мумкинми? Бу саволга Яков Бернулли томонидан исботланган теорема (1713 йилда нашр этилган) ижобий жавоб беради, бу теорема “катта сонлар қонуни” номи билан юритилади, у эҳтимоллар назариясининг фан сифатида шаклланишига асос солди. Бернуллининг исботи мураккаб эди. Теореманинг содда исботини П.Л.Чебишев 1846 йилда баён этган.

**Бернулли теоремаси.** *Агар* ***n*** *та эркли синашнинг ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли* ***p*** *ўзгармас ва синашлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частотанинг* ***р*** *эҳтимолдан четланиши абсолют қиймат бўйича, исталганча кичик бўлиш эҳтимоли бирга исталганча яқин бўлади.*

Бошқача қилиб айтганда, агар исталганча кичик мусбат сон бўлса, у ҳолда теорема шартлари бажарилганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

**Исботи.** орқали (дискрет тасодифий миқдор) биринчи синашда, орқали иккинчи синашда, ..., орқали *n-*синашда ҳодисанинг рўй бериш сонини белгилаймиз.

Равшанки бу миқдорларнинг ҳар бири фақат иккита қиймат: 1 ни (А ҳодиса рўй берди) *р* эҳтимол билан ва 0 ни (ҳодиса рўй бермади) 1*-р=q* эҳтимол билан қабул қилиши мумкин.

Қаралаётган миқдорларга Чебишев теоремасини қўллаш мумкинми? Агар тасодифий миқдорлар жуфт-жуфт эркли ва уларнинг дисперсиялари чегараланган бўлса, мумкин. Иккала шарт ҳам бажарилади. Ҳақиқатдан ҳам миқдорларнинг жуфт-жуфт эрклилиги тажрибаларнинг эрклилигидан келиб чиқади. Ихтиёрий (*i*=1, 2, …, *n*) миқдорнинг дисперсияси *p\*q* кўпайтмага тенг, *p+q=1* бўлгани учун *p\*q* кўпайтма дан ортмайди (маълумки, йиғиндиси ўзгармас бўлган икки соннинг кўпайтмаси ўзининг энг катта қийматига кўпайтувчилар ўзаро тенг бўлган ҳолда эришади. Бу ерда *p+q=1* , яъни ўзгармас, шунинг учун *p=q=*  да  *p\*q* кўпайтма энг катта қийматга эга бўлади, бу қиймат га тенг.), демак бу миқдорларнинг дисперсиялари чегараланган, масалан С= сони билан.

Кўрилаётган миқдорларга Чебишев теоремасини (хусусий ҳолини) қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

Ҳар бир миқдорнинг ***а*** математик кутилиши (яъни битта синашда ҳодисанинг рўй бериш сонининг математик кутилиши) ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли *р* га тенг эканлигини эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

Энди каср *n* та синашда А ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси га тенглигини кўрсатиш қолди, холос. Ҳақиқатдан миқдорларнинг ҳар бири ҳодиса мос синашда рўй берганида бирни қабул қилади; демак йиғинди n та синашда ҳодисанинг рўй бериш сони m га тенг. Демак,

Бу тенгликни ҳисобга олиб, узил-кесил

тенгликни ҳосил қиламиз.

**Эслатма.** Бернулли теоремасига асосланиб, синашлар сони ортиши билан нисбий частота албатта р эҳтимолга интилади, деб хулоса чиқариш нотўғри бўлар эди; бошқача қилиб айтганда, Бернулли теоремасидан тенглик келиб чиқмайди. Теоремада фақат тажрибалар сони етарлича катта бўлганда нисбий частотанинг ҳар бир синашда ҳодиса рўй беришининг ўзгармас эҳтимолидан исталганча кам фарқ қилиши эҳтимоли тўғрисида сўз боради.

Шундай қилиб, нисбий частотанинг р эҳтимолга интилиши математик анализдаги маънодаги интилишдан фарқ қилади. Бу фарқни таъкидлаш мақсадида “эҳтимол бўйича яқинлашиш” тушунчаси киритилади. Аниқроғи, кўрсатилган интилиш турлари орасидаги фарқ қуйидагидан иборат:

Агар нисбат да математик анализдаги интилиш маъносида *р* га интилса, у ҳолда лар учун албатта тенгсизлик бажарилади; агарда нисбат да *р* га эҳтимол бўйича интилса, у ҳолда *n* нинг айрим қийматларида тенгсизлик бажарилмай қолиши мумкин.

Шундай қилиб, Бернулли теоремасига кўра да нисбий частота р га эҳтимол бўйича интилади. Бернулли теоремаси қисқача қуйидагича ёзилади:

Кўриниб турибтики, Бернулли теоремаси синашлар сони етарлича кўп бўлганда нисбий частота нима учун турғунлик хоссасига эга бўлишини тушунтиради ва эҳтимолнинг статистик таърифини асослайди.

**Классик лимит теорема**

Maрказий лимит теоремалар – эҳтимоллар назариясидаги шундай теоремалар синфики, уларда тахминан бир хил масштабга ва суст (кучсиз) боғлиқликка эга бўлган жуда катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси нормал тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлишини тасдиқлашади.

Амалиётда жуда кўп тасодифий миқдорлар бир нечта суст боғланган тасодифий факторлар таъсирида шаклланади, уларнинг тақсимотини нормал деб қабул қилишади. Бунда бу факторларнинг бирортаси хам доминанта бўлмаслиги шарти бажарилиши лозим. Бундай ҳолларда марказий лимит теоремалар нормал тақсимотни қўллашни асослаб беради.

**Марказий лимит теореманинг классик шакли.**

Айтайлик эркли, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг чексиз кетма-кетлиги берилган бўлиб, улар чекли математик кутилма ва чекли дисперсияга эга бўлсин. Белгилаш киритамиз: =, у ҳолда

тақсимот бўйича .

ёки

бунда Ф(*х*) – стандарт нормал тақсимотнинг тақсимот функцияси

Эслатмалар:

* Но расмий айтганда, классик марказий лимит теорема, n та эркли, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси тақсимотга яқин тақсимотга эга эканлигини тасдиқлайди. Эквивалент равишда тасодифий миқдор тақсимотга яқин тақсимотга эга бўлади.
* тасодифий миқдорлар турли хил эҳтимоллик фазоларида аниқланган бўлиши мумкин. Улар фақат битта ҳақиқий тўғри чизиқда қиймат қабул қилса бўлди.
* Стандарт нормал тақсимотнинг тақсимот функцияси узлуксиз бўлгани учун, ушбу тақсимотга яқинлашиш тақсимот функцияларининг стандарт нормал тақсимот функциясига нуқтали яқинлашишига эквивалент.

белгилаш киритсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз

* Классик марказий лимит теорема характеристик функциялар ёрдамида исботланади (узлуксизлик ҳақидаги Леви теоремасига асосланиб)
* Умуман олганда тақсимот функцияларнинг яқинлашишидан, зичлик функциялариниг яқинлашиши келиб чиқмайди, лекин классик ҳолатда бу тасдиқ ўринли.

**ЛОКАЛ МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМА**

Классик марказий лимит теорема шартларига қўшимча равишда, тасодифий миқдорларнинг тақсимоти абсолют узлуксиз бўлса, яъни у зичлик функцияга эга бўлса, у ҳолда тасодифий миқдор тақсимоти ҳам абсолют узлуксиз бўлиб, шу билан бирга

,

бунда, - функция тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси, ўнг томонда эса стандарт нормал тақсимотнинг зичлик функцияси.

## Айрим умумлаштиришлар

Классик марказий лимит теорема натижаси тўла эрклилик ва бир хил тақсимланганлик шартларидан кўра янада умумийроқ шартларда ҳам ўринли.

### **Марказий лимит теоремаси (Линдеберг)**

Айтайлик эркли тасодифий миқдорлар битта эҳтимоллик фазосида аниқланган бўлиб, чекли математик кутилма ва дисперсияларга эга бўлсин. , у ҳолда

Линдеберг шарти бажарилсин

У ҳолда

тақсимот бўйича

ёки

### **Марказий лимит теорема (Ляпунов)**

### Айтайлик Линдеберг марказий лимит теоремаси базавий шартлари бажарилган бўлсин. тасодифий миқдорлар чекли учинчи моментга эга бўлсин, у ҳолда

Кетма-кетлик аниқланган бўлиб, агар

(Ляпунов шарти)

бўлса, у ҳолда

тақсимот бўйича

ёки

**Мисол.** Хусусий самолёт умумий оғирлиги 360 кг.дан ошмайдиган кўпи билан 4 кишини ўз бортига олиши мумкин. Пассажирнинг оғирлиги Х тасодифий миқдор бўлиб, нормал қонун бўйича тақсимланган бўлсин. МХ=75кг, . Самолётда ортиқча юк пайдо бўлиш даврийлиги топилсин?

Айтайлик -*i-*пассажир оғирлиги бўлсин (*i*=1,2,3,4).

яъни самолётда мўлжалланган оғирлик миқдорини меъёрдан ошиши ўрта ҳисобда ҳар 100 та рейснинг 3 тасида кузатилишини англатади.

**1-“муаммоли вазият”:** “Асака” автомобил заводида, эҳтиёт қисмларнинг ўлчамлари ўртача ўлчамдан фарқи 2мм дан ошмасин. Ўртача ўлчам деталлар ўлчамларининг математик кутилмаси билан устма-уст тушсин ва ўртача квадратик четланиш 0.25мм га тенг бўлса, автомобил бирор бир қисмини тўғри йиғишни ташкил этиш эҳтимолини баҳоланг? Олинган натижаларга интерпретация беринг?

**Ечилиши:** Масаланинг берилиш шартига кўра эҳтиёт қисмлар ўлчамларини тасодифий миқдор десак, ушбу тасодифий миқдор турли қийматлар қабул қилади, чунки биз эътиборга олишимизни иложи бўлмаган жуда кўп сабабларга кўра станокдан чиқаётган детал бўлиши керак бўлган ўртача ўлчамдан кўпи билан га фарқ қилар экан, бу эса эканлигини англатади, эҳтиёт қисмнинг ўртача ўлчами, яъни математик кутилмасини М(Х) билан белгиласак, у ҳолда Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб

ёки 98.44%

Эканлигини аниқлаймиз. Буни эса ўрта хисобда автомобилнинг айнан шу қисмини тўғри йиғилганлигига 98.44% гарантия берилганлигини, ва ўрта ҳисобда 10.000 та машинадан 156 тасидагина бу қисми нотўғри йиғилган бўлишини англатади.

**2-Муаммоли вазият.** Йиғиш цехига юборилган 1000 та буюмдан, 200 таси сифатини текшириш учун тасодифий танлаб олинди. Уларнинг ичидан 25 таси брак чиқди. Брак деталлар сонинининг ажратиб олинган деталлардаги улушини брак детал ишлаб чиқариш эҳтимоли сифатида қабул қилиб, бутун партияда брак деталлар улуши камида 10% кўпи билан 15 % бўлиш эҳтимоли топилсин.

**Ечилиши.** Марказий лимит теореманинг хусусий холи Лапласнинг интеграл теоремасига шартларини қаноатлантиради

**9-MAVZU**

**MATEMATIK STATISTIKANING ASOSIY MASALALARI. MATEMATIK STATISTIKA PREDMETI. BOSH VA TANLANMA TO’PLAM. TANLANMANING BOSHLANG’ICH STATISTIK TAHLILI.**

**Tanlanma ma‘lumotlarning dastlabki statistik tahlili**

Ehtimollar nazariyasida o‘rganilayotgan tasodifiy jarayonning matematik modeli sifatida {Ω,,P} ehtimollik fazosi qaraladi, bunda Ω - elementar hodisalar fazosi deb ataluvchi biror to‘plam,  – Ω elementar hodisalar fazosining to‘plam osti to‘plamlaridan biror qoidaga ko‘ra ajratilgan tasodifiy hodisalar to‘plami, P  to‘plamdagi tasodifiy hodisalar ehtimoli. Xar bir tayin holat uchun P ehtimollik o‘lchovi to‘la aniqlanadi. Ehtimollar nazariyasining asosiy vazifasi mavjud ehtimollik fazosi qonuniyatlarini ochib berish, xususan murakkab hodisalarning ehtimollarini aniqlashga imkon beruvchi usullarni ishlab chiqishdan iboratdir.

Biroq amaliyotda tayin tajribalarni o‘rganishda P ehtimollik ba’zi bir noaniqliklarga ega bo‘ladi. Ko‘p hollarda aytish mumkinki, P ehtimollik biror ehtimollar sinfining elementi bo‘ladi. Bu sinf **** da berilishi mumkin bo‘lgan barcha ehtimolliklarni o‘z ichiga oladi. Agar  sinf berilgan bo‘lsa, u holda ehtimollikning statistik modeli yoki qisqacha statistik modeli berilgan deyiladi. Shunday qilib statistik model o‘rganilayotgan tajribani ehtimollik modelida ehtimollikni berishda u yoki bu noaniqlik bo‘lgandagi holatni yoritadi. Matematik statistikaning vazifasi bu noaniqliklarni kuzatilayotgan tajriba ma‘lumotlari asosida kamaytirishdan iborat.

Shunday qilib matematik statistikada barcha mulohazalar statistik ma’lumotlarga, ya’ni kuzatilgan tajriba natijalariga asoslanadi. Ko‘p hollarda esa dastlabki statistik ma’lumotlar Ρ taqsimotga ega bo‘lgan X tasodifiy miqdor ustida o‘tqazilgan tajribalar natijasi bo‘ladi. Bu holda tajriba tasodifiy miqdor ustida n ta sinov o‘tqazishdan iborat bo‘lib, i-sinov natijasi Xi tasodifiy miqdor bilan aniqlanadi, i=1,2,…,n. X1,Х2,…,Xn – to‘plamga tanlanma deyiladi, n- tanlama hajmi. Biz kuzatishlar bir-biriga bog‘liqsiz bo‘lgan holni qaraymiz. Shu sababli X1,X2,…,Xn larni n ta bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Tayin o‘tqazilgan tajriba natijalari X1,X2,…,Xn tanlanma hisoblanadi, uni x1, x2,.., xn lar orqali belgilaymiz.

Ma‘lumki x1, x2,…,xn sonlar kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning qiymatlar to‘plamidan bo‘ladi, shu sababli ular variantalar deyiladi. Faraz qilaylik  kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning barcha qiymatlar to‘plami bo‘lsin.  bosh to‘plam deyiladi, x1,x2,…,xn qiymatlarni bosh to‘plam  dan qaytariladigan tanlashlar sxemasi bo‘yicha olingan, hajmi n bo‘lgan tanlanma deb qarash mumkin. Tanlanmani o‘sib borish yoki kamayib borish tartibida yozilishiga variatsion qator deyiladi. Variatsion qatorning uchta turi mavjud: ranjirlangan, diskret, oraliq variatsion qatorlar. Variatsion qatorni ko‘pincha taqsimot qatori ham deyiladi. Ranjirlangan qator tanlanma hajmi kichik bolganda bu tanlanmaning alohida qiymatlari x1,x2,…,xn larni o‘sish (kamayish) tartibida joylashishidan iboratdir, x(1)≤x(2)≤x(3) ≤…..≤x(n). Agar variantalar soni yetarlicha katta bo‘lib, xmin va xmax lar o‘rtasidagi farq kichik bo‘lsa, ranjirlangan qator juda katta bo‘ladi. Agar belgi qiymatlari bir nechta bo‘lsa, u holda diskret variatsion qator tuziladi.

Diskret variatsion qator, ikkita qatordan tashkil topgan bo‘lib, birinchi qatorda belgining x1,x2,…,xs turli variantalari ikkinchi qatorda esa shu variantalarga mos ularning chastotalari ni yoki nisbiy chastotalari ni/n joylashgan bo‘ladi. Agar tanlanma hajmi katta bo‘lib, xmin va xmax o‘rtasidagi farq yetarlicha katta bo‘lsa, u holda oraliq variatsion qator tuziladi.

Oraliq variatsion qator ikkita qatordan tuzilgan bo‘lib, birinchi qatorda o‘rganilayotgan belgining oraliqlaridan, ikkinchisi esa bu oraliqlarga tegishli variantalar chastotasi yoki nisbiy chastotalaridan tuzilgan. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi. Tanlanmaning statistik taqsimotini oraliqlar va ularning chastotalari yordamida ham berish mumkin. Ehtimollar nazariyasida taqsimot deganda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan bu qiymatlar ehtimollari orasidagi moslik tushuniladi, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar orasidagi moslik tushuniladi.

Faraz qilaylik birorta bir jinsli ob‘yektlar to‘plamining miqdor yoki sifat belgilarini o‘rganish talab qilinayotgan bo‘lsin.

**Empirik taqsimot funktsiya.**

Faraz qilaylik diskret variatsion qator berilgan (1-jadval)

# 1-jadval

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …. |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

# Bu yerda ,

 dan kichik variantalar soni bo‘lsin , bunda



boshqa so‘z bilan aytganda,  X tasodifiy miqdor ustida n ta kuzatish o‘tqazilgandagi  hodisaning ro‘y berishlari chastotalar soni.

**Ta‘rif.** Tanlamaning empirik taqsimot funktsiyasi Fn(u) deb n(u)/n nisbatga aytiladi, ya‘ni

(1.1)

**Empirik taqsimot funktsiya**  taqsimot funktsiyaning barcha xossalarini qanoatlantiradi. Faraz qilaylik  kuzatilayotgan X tasodifiy miqdorning noma‘lum taqsimot funktsiyasi bo‘lsin. Odatda ni X tasodifiy miqdorning nazariy taqsimot funktsiyasi deyiladi. Shuni aytib o‘tish kerakki, tayin tajriba o‘tqazilguncha empirik taqsimot funktsiyani tasodifiy miqdor deb qarash kerak, chunki u  tanlamaning funktsiyasi xisoblanadi. Kuchaytirilgan katta sonlar qonunidan Glivenko teoremasi kelib chiqadi.

**Glivenko teoremasi**. Ixtiyoriy >0 son uchun quyidagi munosabat o‘rinli  Shunday qilib empirik taqsimot funksiya  “taqriban”  nazariy taqsimot funktsiyaga tengdir. Empirik funktsiya zinapoyasimon funktsiya bo‘lib,  nuqtalarda sakrashlarga ega,  nuqtadagi sakrash qiymati  ga teng,

# Fn(x)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(n1+n2)/n

n1/n

x1 x2 xk

1-rasm

Empirik fuktsiya bilan nazariy taqsimot funktsiya  ning farqi shundan iboratki,  (X<x) hodisaning ehtimolini, empirik taqsimot funktsiya  esa xuddi shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi.

Misol. Tanlanmaning berilgan diskret variatsion qatori bo‘yicha empirik taqsimot funktsiyani yasang.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi | 2 | 6 | 10 |
| ni | 12 | 18 | 20 |

# n= ni =12+18+20=50

# 

# Fn(x)

# 1

0.6

0.24

0 2 6 10 х

2-rasm.

**Poligon va gistogramma.**  nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq **chastotalar poligoni** deyiladi.  nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa **nisbiy chastotalar poligoni** deyiladi.

**Chastotalar gistogrammasi** deb asoslari  uzunlikdagi guruh oraliqlari, balandliklari esa  nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi.



/

/

    ………………………….  3-rasm

Hosil bo‘lgan figuraning yuzasi n ga teng. Xususan oraliqlar qadamlari bir xil ham bo‘lishi mumkin  Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari  uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa  nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzasi birga teng. Boshqa so‘z bilan aytganda nisbiy chastotalar poligoni va gistogrammasi nazariy taqsimot funktsiya  zichlik funktsiyasining geometrik bahosi xisoblanadi.

**Tanlanmaning sonli xarakteristikalari.**

Nazariy taqsimotning sonli xarakteristikalari kabi X1,X2,….,Xn tanlanmaning empirik taqsimot funktsiyasining ham sonli xarakteristikalari kiritiladi. Tanlanma momentlar quyidagicha aniqlanadi:

Ranjirlangan variatsion qator berilgan holda:

  tartibli tanlanma moment.(1.3)

** ** tartibli markaziy moment. (1.4)

Ko‘p hollarda ishlatiladigan  va  xarakteristikalar aloxida harflar bilan belgilanadi.

- tanlanma o‘rta qiymat, (1.5)

- tanlanma dispersiya, (1.6)

 =  - tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish. (1.7)

Agar diskret variatsion qator berilgan bo‘lsa tanlanma momentlar quyidagicha hisoblanadi:

 j- tartibli tanlanma moment, (1.8)

 j- tartibli markaziy moment (1.9)

 tanlanma o‘rta qiymat (1.10)

 tanlanma dispersiya (1.11)

Oraliqli variatsion qatorlarda ham tanlanma momentlar diskret variatsion qatorlar uchun berilgan formulalar orqali topiladi, bunda xi variantalar sifatida oraliq o‘rtalari olinishi mumkin. Diskret va oraliqli variatsion qatorlarda hisoblashni soddalashtirish uchun

 (1.12)

 (1.13)

formulalardan foydalanish mumkin, bunda C- umuman olganda ixtiyoriy son, lekin hisoblashni soddalashtirish uchun eng ko‘p qatnashgan xi ni olgan ma’qul, k- xi larning o‘zgarish qadami.

2. **Tanlanma modasi M0.** Ranjirlangan variatsion qatorlarda M0 aniqlanmaydi. Diskret variatsion qatorlarda eng katta chastotali varianta M0 bo‘ladi, agar eng katta chastotali varianta ikkita bo‘lsa, u holda variatsion qator bimodal qator hisoblanadi va h.k. Agar kuzatishlar oraliqli variatsion qator ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda moda

 (1.14)

formula bilan hisoblanadi, bu yerda XMo-eng ko‘p qatnashgan oraliq - moda oralig‘ining quyi chegarasi, nMo- moda oralig‘i chastotasi, nMo+1- moda oralig‘idan bitta keyingi oraliq chastotasi, nMo-1- moda oralig‘idan bitta oldingi oraliq chastotasi, k-moda oraliq uzunligi.

Ranjirlangan variatsion qatorlarda **** quyidagi formula bilan aniqlanadi:

 (1.15)

bu erda n-tanlanma hajmi, [a]- a sonning butun qismi.

Diskret variatsion qator mediana **** yig‘ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan yoki yig‘ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan  variantaga aytiladi.

Oraliq variatsion qator uchun  quyidagicha formula bilan aniqlanadi:  (1.16)

Bu yerda  oraliqli variatsion qatorda yig‘ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan oraliq yoki yig‘ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan oraliq - mediana oralig‘ining boshi, - mediana oralig‘ining chastotasi,  mediana oralig‘i chastotasigacha bo‘lgan chastotalar yig‘indisi, ya‘ni  , k-mediana oralig‘i uzunligi.

**10-MAVZU**

**Tanlanmaning sonli xarakteristikalari. Tanlanma matematik kutilish, tanlanma dispersiya va tanlanma o’rtacha kvadratik chetlanish tushunchalari. Tanlanma sonli xarakteristikalari xossalari.**

**Tanlanmaning sonli xarakteristikalari.**

Nazariy taqsimotning sonli xarakteristikalari kabi X1,X2,….,Xn tanlanmaning empirik taqsimot funktsiyasining ham sonli xarakteristikalari kiritiladi. Tanlanma momentlar quyidagicha aniqlanadi:

Ranjirlangan variatsion qator berilgan holda:

  tartibli tanlanma moment.(1.3)

** ** tartibli markaziy moment. (1.4)

Ko‘p hollarda ishlatiladigan  va  xarakteristikalar aloxida harflar bilan belgilanadi.

- tanlanma o‘rta qiymat, (1.5)

- tanlanma dispersiya, (1.6)

 =  - tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish. (1.7)

Agar diskret variatsion qator berilgan bo‘lsa tanlanma momentlar quyidagicha hisoblanadi:

 j- tartibli tanlanma moment, (1.8)

 j- tartibli markaziy moment (1.9)

 tanlanma o‘rta qiymat (1.10)

 tanlanma dispersiya (1.11)

Oraliqli variatsion qatorlarda ham tanlanma momentlar diskret variatsion qatorlar uchun berilgan formulalar orqali topiladi, bunda xi variantalar sifatida oraliq o‘rtalari olinishi mumkin. Diskret va oraliqli variatsion qatorlarda hisoblashni soddalashtirish uchun

 (1.12)

 (1.13)

formulalardan foydalanish mumkin, bunda C- umuman olganda ixtiyoriy son, lekin hisoblashni soddalashtirish uchun eng ko‘p qatnashgan xi ni olgan ma’qul, k- xi larning o‘zgarish qadami.

2. **Tanlanma modasi M0.** Ranjirlangan variatsion qatorlarda M0 aniqlanmaydi. Diskret variatsion qatorlarda eng katta chastotali varianta M0 bo‘ladi, agar eng katta chastotali varianta ikkita bo‘lsa, u holda variatsion qator bimodal qator hisoblanadi va h.k. Agar kuzatishlar oraliqli variatsion qator ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda moda

 (1.14)

formula bilan hisoblanadi, bu yerda XMo-eng ko‘p qatnashgan oraliq - moda oralig‘ining quyi chegarasi, nMo- moda oralig‘i chastotasi, nMo+1- moda oralig‘idan bitta keyingi oraliq chastotasi, nMo-1- moda oralig‘idan bitta oldingi oraliq chastotasi, k-moda oraliq uzunligi.

Ranjirlangan variatsion qatorlarda **** quyidagi formula bilan aniqlanadi:

 (1.15)

bu erda n-tanlanma hajmi, [a]- a sonning butun qismi.

Diskret variatsion qator mediana **** yig‘ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan yoki yig‘ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan  variantaga aytiladi.

Oraliq variatsion qator uchun  quyidagicha formula bilan aniqlanadi:  (1.16)

Bu yerda  oraliqli variatsion qatorda yig‘ma chastotalar tanlanma hajmining yarmi erishiladigan oraliq yoki yig‘ma nisbiy chastotalar 0,5 ga erishiladigan oraliq - mediana oralig‘ining boshi, - mediana oralig‘ining chastotasi,  mediana oralig‘i chastotasigacha bo‘lgan chastotalar yig‘indisi, ya‘ni  , k-mediana oralig‘i uzunligi.

**11-MAVZU.**

**TAQSIMOT NOMAʼLUM PARAMETRLARINING STATISTIK BAHOLARI. BAHOLAR VA ULARNING TURLARI. BAHOLARNING XOSSALARI: SILJIMAGANLIK, AHAMIYATLILIK, SAMARALILIK, NUQTALI BAHOLAR. BAHOLARNI TOPISH USULLARI: MOMENTLAR USULI, ENG KATTA OʻXSHASHLIK USULI**

**Taqsimot parametrlarining statistik baholarini topish usullari**

Aytaylik o‘rganilayotgan belgining taqsimoti nazariy mulohazalardan aniqlangan bo‘lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi yuzaga kelishi tabiiydir.

**Ta’rif.** Nazariy taqsimot noma’lum parametrining **statistik baxosi** deb tanlanmadan olingan ixtiyoriy funktsiyaga aytiladi.

Statistik baxolar baxolanayotgan parametrni yaxshi yaqinlashtirib berishi uchun ular ma’lum talablarni qanoatlantirishlari lozim.

Faraz qilaylik  nazariy taqsimotning noma’lum  parametri bahosi bo‘lsin va hajmi n ga teng bo‘lgan tanlanma bo‘yicha  baho topilgan bo‘lsin. Endi bosh to‘plamdan hajmi n ga teng bo‘lgan boshqa tanlanma hosil qilamiz va bu tanlanma bo‘yicha  bahoni topamiz va hokazo.  sonlar bir xil bo‘lishi shart emas. Shunday qilib  bahoni tasodifiy miqdor deb,  sonlarni esa uning mumkin bo‘lgan qiymatlari deb qarash mumkin.

Boshqa tomondan, ta‘rifdan kelib chiqadiki bitta parametr uchun bir nechta yoki cheksiz ko‘p statistik baxolar tuzish mumkin. Shu sababli barcha baholar sinfi ichidan «yaxshi» larini ajratish, ya’ni shunday statistika ajratish kerakki, ularning qiymatlari u yoki bu ma’noda noma’lum parametrning haqiqiy qiymati atrofida joylashgan bo‘lsin.

**Ta‘rif**. **Siljimagan baho** deb, tanlanma hajmi n ixtiyoriy bo‘lganda ham matematik kutilishi baholanayotgan  parametrga teng bo‘lgan  statistik bahoga aytiladi,

 (2.1)

agar bu shart bajarilmasa, u holda bu bahoga siljigan baho deyiladi va siljish  ayirma sifatida aniqlanadi.

Aynan bitta parametr uchun bir nechta siljimagan baholarni tuzish mumkin.

Masalan, noma’lum parametr kuzatilayotgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi bo‘lsin, ya’ni, **** shunday qilib

 (eslatib o‘tamizki tanlanma bu  tasodifiy miqdorning  ta nusxasidir).

Statistik baho sifatida esa quyidagini olamiz.

 (2.2)

Bu yerda  o‘zgarmas sonlar va ular uchun  tenglik o‘rinli bo‘lsin,



Shunday qilib, (2.2) noma’lum matematik kutilma uchun siljimagan baho bo‘ladi.

Xususan bo‘lsa, u holda

 (2.3)

Agar bo‘lsa, u holda

 (2.4)

demak o‘rta qiymat (matematik kutilma)  uchun siljimagan baho tanlanma o‘rta qiymat bo‘lar ekan. Xuddi shunday  dispersiyani tanlanma dispersiya orqali baholash mumkin. Umumiylikka zarar yetqazmasdan  deb olamiz ( bo‘lgan holda  …,tasodifiy miqdorlarga o‘tiladi), u holda  bo‘ladi.



.

Shunday qilib  tanlanma dispersiya  dispersiya uchun siljigan baho bo‘ladi. Siljish  ga teng bo‘lib, bundan ko‘rinib turibtiki  da siljish nolga intiladi. Demak yetarlicha katta n hajmli tanlanmalarda  tanlanma dispersiyani  dispersiyaning taxminan siljimagan bahosi deb qabul qilish mumkin. Kichik hajmli tanlanmalarda dispersiyaning siljimagan bahosi sifatida quyidagicha aniqlanadigan to‘g‘rilangan dispersiya ishlatiladi:

 (2.5)

Haqiqatdan ham  siljimagan baho bo‘ladi, chunki

 (2.6)

bo‘ladi.

Yuqoridagi misolda ko‘rsatilganidek bitta parametrga bir nechta siljimagan baho tuzish mumkin, bu baholar ichidan yaxshisini topish uchun statistik bahodan effektivlik sharti talab qilinadi.

**Effektiv baxo**.  bilan noma’lum  parametrning barcha siljimagan baholari to‘plamini belgilaymiz. Faraz qilaylik

,  bo‘lsin,

Agar  bo‘lsa, u holda  baho  bahoga nisbatan effektivroq deyiladi.

Siljimagan baholar to‘plamidagi (tanlama hajmi n berilganda) dispersiyasi eng kichik bo‘lgan statistik bahoga **tekis effektiv** baho deyiladi.

 (2.7) O‘quvchiga tanlanma o‘rta qiymat X1 statistikaga nisbatan effektivroq baho bo‘lishini tekshirishni taklif qilamiz.

**Eslatma:** tekis effektiv baho har doim mavjud bo‘lavermaydi, chunki to‘plam infimiumi har doim ham bu to‘plamga tegishli bo‘lmaydi.

Katta xajmli tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo‘yiladi.

**Ta’rif**  uchun

 (2.8)

bo‘lsa,  statistik baho  parametr uchun **asosli baho** deyiladi.

Demak asosli baho baholanayotgan parametr  ga  da ehtimol bo‘yicha yaqinlashadigan statistik bahoga aytiladi.

Noma’lum parametrlarni baholashning bir nechta usullari mavjud. Baholashning momentlar va eng katta o‘xshashlik usullarini ko‘rib chiqamiz.

**Momentlar usuli.** Faraz qilaylik kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi noma’lum  parametrga, ya’ni **** ta noma’lum parametrga bog‘liq bo‘lsin. Momentlar usulining mantiqiy asosi shundan iboratki, parametrlar shunday bo‘lishi kerakki taqsimotning nazariy momentlari mos tanlanma momentlariga teng bo‘lishi kerak. - tartibli boshlang‘ich va markaziy momentlarni mos ravishda quyidagicha belgilaymiz

Nazariy taqsimot  parametrga bog‘liq bo‘lganligi sababli, nazariy momentlar ham  parametrga bog‘liq bo‘ladi, 

Agar noma’lum parametrlar soni **** ta bo‘lsa, u holda quyidagi  ta tenglamalar tizimini tuzamiz.

 (2.9)

bunda  j-tartibli tanlanma momentlar.

Agar (2.9) tenglamalar tizimining yechimi  mavjud bo′lsa, u holda yechim noma’lum parametrga momentlar usulida olingan baho deyiladi.

Shuni ta’kidlab o‘tamizki momentlar usulida bir xil ma’noli momentlar tenglashtirilishi kerak. Masalan, agar noma’lum parametrlar matematik kutilma va dispersiya bo’lsa, u holda tabiiyki quyidagi tenglamalar tizimini hosil qilamiz

 (2.10)

**Eng katta o‘x shashlik usuli**

Belgilash kiritamiz:  agar tasodifiy miqdor X diskret bo‘lsa, X uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa  tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi. U holda quyidagicha tuzilgan funktsiyaga

 (2.11)

O‘xshashlik funktsiyasi deyiladi. Eng katta o‘xshashlik usulining mohiyati shundan iboratki, noma’lum parametrga eng katta ehtimolli tanlanma asosida baxo tuzish kerak, ya’ni  parametrni shunday tanlash kerakki, o‘xshashlik funktsiyasi eng katta qiymat qabul qilsin, demak agar  parametrning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plamini  deb belgilasak quyidagi shartni bajarilishini talab qilamiz

 (2.12)

Faraz qilaylik, barcha  lar uchun  va o‘xshashlik funktsiyasi  bo‘yicha differentsiallanuvchi bo‘lsin. Yuqorida aytilganlarga ko‘ra, parametrning **eng katta o‘xshashlik bahosi** deb, quyidagi tenglamaning

 (2.13)

 yechimiga aytiladi. Bizga ma’lumki funktsiya va uning logarifmining statsionar nuqtalari ustma-ust tushadi, shuning uchun (2.13) tenglama quyidagi tenglamaga teng kuchlidir.

 (2.14)

agar noma’lum parametr  bo‘lsa, ya’ni  ta noma’lum parametr bo‘lsa, u holda quyidagi tenglamalar tizimiga ega bo‘lamiz

 (2.15)

yoki unga teng kuchli tenglamalar tizimi

 (2.16)

Bu tenglamalar tizimining yechimiga noma’lum parametrga eng katta o‘xshashlik usulida topilgan baho deyiladi.

**12-MAVZU**

**ORALIQLI BAHOLAR. ISHONCHLILIK EHTIMOLI VA ISHONCHLILIK ORALIG’I. NORMAL TAQSIMOTNING NOMAʼLUM PARAMETRLARI ISHONCHLILIK ORALIQLARI.**

**Oraliq baho. Ishonchlilik oralig**‘**i.**

Tanlanmadagi variantlar kam takrorlangan holdagina, tanlama berilganlari guruhlanadi, shu bilan birga guruhlar soni guruhlash usuliga bog‘liq bo‘lmasligi kerak. **Nuqtaviy baho** deb, bitta son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Yoqirida ko‘rilgan barcha baholar nuqtaviy baholar, chunki ular sonlar o‘qida bitta sonni aniqlaydi. Hajmi unchalik katta bo‘lmagan tanlanma uchun (n<30) nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan farq qilishi mumkin, ya‘ni qo‘pol xatoliklarga olib kelishi mumkin. Shu sababli hajmi kichik bo‘lgan tanlanmalarda oraliqli baholardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

**Oraliq baho deb**, ikkita son - oraliq uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. Faraz qilaylik - noma’lum  parametrning bahosi bo‘lsin ( o‘zgarmas yoki tasodifiy miqdor bo‘lishi mumkin). Barcha nuqtaviy baholar tanlanma asosida baholanadi, lekin tanlanmalar tasodifiy bo‘lganligi uchun baholar ham tasodifiy miqdor bo‘lib, asl  parametrlardan farq qiladi. Bahoning aniqliligini   deb belgilasak, u holda  bo‘ladi, tushunarliki  qanchalik kichik bo‘lsa,  baho shunchalik aniq bo‘ladi. Statistik usullar  baho  tengsizlikni qanoatlantiradi deb qat’iy davo qilishga imkon bermaydi, har qanday aniqlikni qandaydir  ehtimol bilan olish mumkin:

 (2.17)

va  tengsizlikni unga teng kuchli bo‘lgan  tengsizlik bilan almashtirsak (2.17) quyidagi ko‘rinishni oladi

 (2.18)

(2.18) shart  oraliq  parametr qiymatini berilgan ishonchlilik ehtimoli bilan qoplashini bildiradi.  oraliqqa ishonchklilik oralig‘i deyiladi, - ehtimollikka ishonchlilik ehtimoli ham deyiladi. Ko‘p hollarda  birga yaqin qilib tanlanadi (masalan 0,95; 0,98, 0.99 va h.k.).

**Eslatma.** Baholanayotgan  parametr emas, balki ishonchlilik oralig‘i tasodifiy miqdor bo‘lganligi uchun, *θ* ning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli haqida emas, balki ishonchlilik oralig‘i *θ* ni qoplash ehtimoli haqida gapirish to‘g‘riroq bo‘ladi.

**Dispersiyasi  ma’lum bo‘lgan normal taqsimotning noma‘lum matematik kutilmasi  uchun ishonchlilik oralig‘i**

Aytaylik, bosh to‘plam parametrlari **** va  bo‘lgan normal taqsimotga ega bo‘lsin, ya’ni kuzatilayotgan X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan va  noma’lum bo‘lib,  ma’lum bo‘lsin. Bu  kabi belgilanadi.

Noma’lum **** parametrning statistik bahosi sifatida tanlanma o‘rta qiymatini olamiz. Ma’lumki, o‘zaro erkli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi normal taqsimotga ega bo‘lib, uning parametrlari mos parametrlar yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya‘ni bizning holda . Shunday qilib

 (2.19)

Bu yerda  ва - standart normal taqsimot funktsiya.

(2.19) tenglikka asosan

 (2.20)

Shunday qilib θ parametr uchun

 (2.21)

va γ ishonchlilik ehtimoli bilan

 (2.22)

oraliq noma’lum  parametrni qoplaydi, bu yerda  quyidagi tenglama yechimidir

 (2.23)

va normal taqsimot funktsiyasi uchun EXM dagi statistik dasturlar orqali aniqlanadi yoki keltirilgan adabiyotlardagi ilovalardan foydalanib topiladi.

** taqsimot (Pirson taqsimoti)**

Aytaylik  (=1,2,…,) lar erkli normal tasodifiy miqdorlar bo‘lib, shu bilan birga ularning matematik kutilmalari 0 ga, o‘rtacha kvadratik chetlanishlari 1 ga teng bo‘lsin, u holda bu miqdorlar kvadratlari yig‘indisi:

 (2.24)

 erkinlik darajali  («xi kvadrat») qonun bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar bu miqdorlar bitta chizikli munosabat bilan bog‘langan, masalan,  bo‘lsa, u holda erkinlik darajalari soni  bo‘ladi.

Erkinlik darajalari soni ortishi bilan taqsimot normal taqsimotga sekin yaqinlashadi.

**taqsimot (Styudent taqsimoti)**

Z normal tasodifiy miqdor, shu bilan birga , , V esa  erkinlik darajali **** qonun bo‘yicha taqsimlangan va Z ga bog‘liq bo‘lmagan miqdor bo‘lsin, u holda

 (2.25)

miqdor  taqsimot yoki  erkinlik darajali Styudent (ingliz statistigi V. Gosset taxallusi) taqsimoti deb ataladigan taqsimotga ega. Erkinlik darajalari soni ortishi bilan Styudent taqsimoti normal taqsimotga tez yaqinlashadi.

**Dispersiyasi noma’lum bo‘lgan normal taqsimotning noma’lum matematik kutilmasi  uchun ishonchlilik oralig‘i**

Aytaylik  bo‘lsin, bu holda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalana olmaymiz, chunki bu holda ishonchlilik oralig‘i noma’lum parametr  ga bog‘liq. Shuning uchun ham baho sifatida quyidagi statistikani tanlaymiz:

 (2.26)

bu yerda  to‘grilangan tanlama dispersiya. Ma’lumki, t-statistika erkinlik darajasi  ga teng bulgan Styudent taqsimotiga (t-taqsimot) ega.

Oraliqli bahoni tuzish uchun quyidagi munosabat bajarilishini talab etamiz

 (2.27)

Bu tenglamadan  miqdor berilgan  ва  bo‘yicha Styudent taqsimoti uchun EXM da mavjud statistik dasturlar bo‘yicha yoki keltirilgan adabiyotlardagi ilovalardan foydalanib topiladi. Agar Y tasodifiy miqdor Styudent taqsimotiga ega bo‘lsa, u holda 

 (2.28)

tenglamaning yechimi sifatida aniqlanadi. Odatda jadvalda  ning qiymatlari beriladi, shuning uchun  quyidagi tenglamaning

 (2.29)

yechimi sifatida topiladi. Shunday qilib, noma’lum  parametr uchun quyidagi oraliq bahoga ega bo‘lamiz.

 (2.30)

Bundan kelib chiqadiki, noma’lum matematik kutilma **** uchun ishonchlilik oralig‘i

 (2.31)

ni hosil qilamiz. (2.30) va (2.22) oraliqlar o′xshashdir, bu yerda

 (2.32)

**Normal taqsimotning  dispersiyasi uchun ishonchlilik oralig‘i**

Aytaylik  bo‘lsin, u holda

 (2.33)

tasodifiy miqdor erkinlik darajasi  ga teng bo‘lgan -taqsimotga (Pirson taqsimoti) ega bo‘ladi.  tasodifiy miqdor faqat manfiy bo‘lmagan qiymatlarni qabul qiladi. Berilgan ishonchlilik ehtimoli  bo‘yicha shunday  ni topish mumkinki, unda

 (2.34)

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerda  miqdor

 (2.35)

tenglamaning yechimi bo‘lib, -taqsimot (Pirson taqsimoti) jadvalidan yoki EXM dagi mavjud statistik dastur paketidan aniqlanadi, bunda  tasodifiy miqdor bo‘lib, erkinlik darajasi  ga teng bo‘lgan  taqsimotga ega. Biroq ishonchlilik oralig‘ini tuzish uchun shunday  sonlarni topish kerakki

 (2.36)

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Bunday  sonlar cheksiz ko‘pdir. Bunday sonlarning yagona juftligini topish uchun quyidagi «simmetriklik sharti» ni kiritamiz:

 (2.37)

 taqsimot jadvalidan (ilova 4) va (2.37) formula orqali  ni topamiz.  ni topish uchun qarama-qarshi hodisa ehtimolidan foydalanamiz:

 (2.38)

 o‘rniga uning (2.33) ifodasini qo‘yib va elementar almashtirishlarni bajarib, ushbu

 (2.39)

tenglikni hosil qilamiz.

Noma‘lum dispersiya uchun ishonchlilik oralig‘ini aniqlovchi tengsizlikni har ikki tomonidan kvadrat ildiz olib, noma‘lum o‘rtacha kvadratik chetlanish  ni γ ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan

 (2.40)

ishonchlilik oralig‘ini hosil qilamiz.

**Tanlanma hajmini aniqlash.**

Shu vaqtgacha biz hajmi berilgan statistik ma’lumotlarning tahlili bilan shug‘ullandik. Yetarlicha aniq natijalar olish uchun tanlanmaning minimal hajmini aniqlash masalasi muhimdir.

Normal taqsimotning dispersiyasi ma’lum bo‘lganda noma’lum o‘rta qiymat uchun ishonchlilik oralig‘ini aniqlashda (2.20) formuladan foydalanish mumkin, u holda quyidagi

 (2.41)

tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar normal taqsimotning dispersiyasi noma‘lum bo‘lsa, u holda ishonchlilik oralig‘ini aniqlash uchun zarur bo‘lgan tanlanma hajmi (2.32) dan aniqlanadigan quyidagi

 (2.42)

formula bo‘yicha aniqlanadi.

Shuni ta‘kidlab o‘tamizki, dispersiya ma‘lum bo‘lganda berilgan ishonchlilik ehtimoli bilan matematik kutilmani qoplaydigan ishonchlilik oralig‘ini tuzishga zarur bo‘lgan tanlanma hajmini tanlanmani hosil qilishdan avval (2.41) formuladan aniqlash mumkin. Biroq (2.42) formulaga ko‘ra yechilayotgan masalada zarur bo‘lgan tanlanma hajmini, noma’lum dispersiya uchun siljimagan baho hisoblangan tanlanmani qayta tahlil qilingandan so‘ng korrektlashtirish mumkin.

**13-MAVZU**

**STATISTIK TAXMINLAR VA ULARNING TURLARI. STATISTIK TAXMINLARNI TEKSHIRISH. STATISTIK TAXMINLARNI TEKSHIRISH MASALASINING UMUMIY QOʻYILISHI. TASDIQLASH ALOMATI TUSHUNCHASI. KRITIK SOHA, KRITIK NUQTA.**

Matematik statistikaning asosiy vazifalaridan biri - statistik taxminlarni tekshirishning ratsional usullarini ishlab chiqishdan iborat.

Statistik taxmin, bu tajribada kuzatilayotgan tasodifiy miqdor noma’lum taqsimotining ko‘rinishi yoki uning xossalari haqidagi ixtiyoriy tasdiq, yoki ma’lum taqsimotning noma’lum parametrlari haqidagi ixtiyoriy farazdir. Bunday taxminlar nazariy tushunchalar yoki tanlanma kuzatishlarning statistik tahlili asosida ilgari suriladi. Masalan, X tasodifiy miqdor Puasson taqsimotiga ega; normal taqsimotga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor  yoki  o‘rta qiymatga ega.

Taqsimotning noma‘lum parametri  haqidagi taxminlar oddiy va murakkab bo‘ladi. Oddiy taxminda noma‘lum parametr  bitta tayin qiymat qabul qilishini ta‘kidlaydi. Murakkab taxminda  parametr qiymatlar to‘plamidan qiymat qabul qilishi ta‘kidlanadi (, , ). Tekshirilayotgan taxmin  harfi bilan belgilanadi. Bizning maqsadimiz tanlama qiymatlari tekshiralayotgan taxminni tasdiqlashini tekshirishdan iborat.

Tekshirilishi kerak bo‘lgan  taxmin nolinchi (asosiy) taxmin deyiladi. Ko‘p hollarda nolinchi taxminni rad etuvchi ixtiyoriy  taxmin alternativ (qarama-qarshi) taxmin ishlab chiqiladi. Oddiy taxmin deb faqat bitta taxminni o‘z ichiga olgan taxminga aytiladi. Murakkab taxmin deb chekli yoki cheksiz sondagi oddiy taxminlardan iborat taxminga aytiladi. Shunday qilib, tekshirish natijasida faqat bitta taxmin qabul qilinadi  yoki , mos ravishda ikkinchisi rad etiladi.

Taxmin bosh to‘plamdan olingan tanlanmalar asosida tekshiriladi, tanlanma tasodifiy bo‘lganligi uchun xatoliklarga yo‘l qo‘yilib, noto‘g‘ri xulosalar qabul qilinishi mumkin. Xatoliklar ikki turga bo‘linadi. Agar taxmin to‘g‘ri bo‘la turib, u rad etilsa 1-tur xatolikka yo‘l qo‘yilgan bo‘ladi. Agar taxmin noto‘g‘ri bo‘la turib, u qabul qilinsa 2-tur xatolikka yo‘l qo‘yilgan bo‘ladi. Bu xatolarning oqibatlari har xil bo‘lishi mumkin, masalan «binoni qurish davom ettirilsin» degan to‘g‘ri qaror rad etilgan bo‘lsa, u holda 1-tur xatolik moddiy zararga olib keladi, agar binoning ag‘darilib tushish xavfiga qaramasdan «qurilish davom ettirilsin» degan qaror qabul qilingan bo‘lsa, u holda ikkinchi tur xatolik kishilarning halokatiga olib kelishi mumkin. Birinchi tur xato ikkinchi tur xatoga nisbatan og‘irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

**1-eslatma**. To‘g‘ri qaror ham ikki holda qabul qilinishi mumkin:

1) taxmin qabul qilinadi, u aslida ham to′g′ri edi;

2) taxmin rad etiladi, u aslida ham noto‘g‘ri edi.

Shunday qilib, ayrim tanlanmalar bo‘yicha to‘g‘ri qaror qabul qilinadi, boshqalari bo‘yicha noto‘g‘ri qaror qabul qilinadi. Qaror esa statistika yoki statistik tasnif deb ataluvchi tanlanmadan olingan biror bir funktsiyaning qiymati asosida qabul qilinadi. Bu statistika qiymatlar to‘plamini ikkita kesishmaydigan to‘plamlarga ajratishi mumkin:

 taxmin qabul qilinadigan (rad etilmaydigan) statistikaning qiymatlar to‘plam ostisi taxminning qabul qilinish sohasi deyiladi.

 taxmin qabul qilinmaydigan (rad etiladigan),  taxmin qabul qilinadigan statistikaning qiymatlar to‘plam ostisiga kritik soha deyiladi. Taxminlarni tekshirganda tushunarliki noto‘g‘ri qaror qabul qilish ehtimolini kamaytirish maqsadga muvofiqdir. Birinchi tur xatoga yo‘l qo‘yish ehtimolini  orqali belgilash qabul qilingan; u ahamiyatlilik darajasi deyiladi. Ahamiyatlilik darajasi ko‘pincha 0,05, 0,01 ga teng qilib olinadi. Lekin ko‘p holda 1-tur xatoligi ehtimolining kamayishi 2-tur xatoligi ehtimolining oshishiga olib keladi. 2 tur xatoligi  bilan belgilanadi. Shuning uchun ham statistika  ва  ehtimolliklar minimal bo‘ladigan qilib tanlanadi. Ushbu qo‘llanmada  taxmin har doim oddiy deb faraz qilinadi, shuning uchun ham to‘g‘ri  taxminda statistika taqsimoti ma‘lum. Eng yaxshi statistikani tanlash usullari ko‘rib chiqilmagan. Statistikaning kritik sohasini aniqlash uchun ahamiyatlilik darajasi  va alternativ taxminning ko‘rinishi e’tiborga olinadi.

Noma’lum parametr  ning qiymati haqidagi asosiy taxmin  quyidagicha:



Alternativ taxmin  esa quyidagi ko‘rinishlardan biri bo‘lishi mumkin:

 , , 

Mos ravishda chap tomonlama, o‘ng tomonlama yoki ikkitomonlama kritik sohalarni olish mumkin. Kritik sohaning chegaraviy nuqtalari statistikaning taqsimot jadvallaridan aniqlanadi.

Statistik taxminni tekshirish bosqichlari quyidagilardan iborat

1)  ва  taxminlar aniqlanadi;

2) Statistika tanlanadi va ahamiyatlilik darajasi beriladi;

3) Ahamiyatlilik darajasi , alternativ taxmin  va jadvallar

orqali kritik soha aniqlanadi;

4) Tanlanma bo‘yicha statistika qiymati hisoblanadi;

5) Statistika qiymati kritik soha bilan taqqoslanadi;

6) Qaror qabul qilish: agar statistika qiymati kritik sohaga kirmasa, u holda  taxmin qabul qilinadi,  rad etiladi, agar kritik sohaga kirsa, u holda  taxmin rad etiladi,  taxmin qabul qilinadi.

Ayrim hollarda altevnativ taxmin  ni aniqlashdan oldin statistika qiymatini xisoblash uchun bosh to‘plam parametrlarining siljimagan baholarini topishni talab etadigan 4) bosqichni bajarish maqsadga muvofiqdir. Masalan  taxmin tekshirilayapti va o‘rta qiymat uchun siljimagan baxo  bo‘lsa, u holda ko‘rinib turibtiki alternativ taxmin  yoki  ko‘rinishda qilib tanlab olish kerak.

Statistik taxminni tekshirish natijalariga quyidagicha interpretatsiya beriladi: agar  taxmin qabul qilinsa, u holda bu isbotlangan hisoblanadi, agar  taxmin qabul qilinsa, u holda  kuzatish natijalariga zid emasligini tan olgan bo‘lamiz, lekin qaror qabul qilishdan oldin yana qo‘shimcha tadqiqot o‘tqazish kerak bo‘ladi.

**14-MAVZU**

**NOMAʼLUM TAQSIMOTNING KOʻRINISHI HAQIDAGI STATISTIK TAXMINNI TEKSHIRISH ALOMATLARI**

**PIRSONNING  TASDIQLASH ALOMATI**

Bosh to‘plam X taqsimoti haqidagi taxminni qanday tekshirish kerakligini ko‘rib chiqaylik. Aytaylik bosh to‘plam qandaydir noma’lum taqsimotga ega bo‘lsin. Bosh to‘plamdan tanlanma olamiz. Tanlanmaga asoslanib yoki boshqa mulohazalarni e’tiborga olib bosh to‘plamning aniq  taqsimot funksiyasi haqidagi taxminni tuzamiz. Bu taqsimotni nazariy deb ataymiz. Tanlanma asosida taqsimotning empirik funktsiyasi  ni topishimiz mumkin. Agar empirik taqsimot nazariy taqsimotga yaqin bo‘lsa bosh to‘plamning taqsimoti haqidagi  taxminni qabul qilamiz. Bunday taxminlarni tekshirish uchun bir necha tasdiqlash alomatlari mavjud bo‘lib, ulardan biri Pirsonning  tasdiqlash alomatini keltiramiz.  tasdiqlash alomatida X bosh to‘plamning o‘zgarish sohasini umuman olganda turli xil uzunliklarga ega bo‘lgan  ta oraliqqa bo‘lamiz. Tanlanma bo‘yicha shu oraliqlar asosida variatsion qator tuzamiz. Agar ayrim oraliqlarda ni  chastota juda kichik bo‘lsa (5 dan kichik), u holda bu oraliqlarni qo‘shni oraliqlar bilan bilashtiramiz. Tanlanma asosida nazariy taqsimot parametrlarining baholarini hisoblaymiz. Shu bilan nazariy taqsimot funktsiya to‘laligicha aniqlanadi. Endi nazariy taqsimot asosida X tasodifiy miqdorning oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolliklari  larni hisoblaymiz:

  (3.1)

bunda . Keyin nazariy chastotalarni hisoblaymiz  (n-tanlanma hajmi). Agar nazariy va empirik chastotalar  va  lar yetarlicha bir-biridan farq qilsa taxminni qabul qilamiz. taxminni tekshirish uchun quyidagi statistikadan foydalanamiz:

 (3.2)

 tasodifiy miqdor erkinlik darajasi bo‘lgan - taqsimotga ega, bu erda  oraliqlar soni, r- tanlanma asosida baholari topilgan nazariy taqsimotning parametrlar soni.

 qanchalik katta bo‘lsa, shunchalik nazariy va empirik taqsimotlar mutanosiblashmagan bo‘ladi.  statistikaning yetarlicha katta qiymatlarida taxminni rad etish kerak. Shuning uchun faqat o‘ng tomonlama kritik sohadan foydalanamiz.

Agar  bo‘lsa, taxminni rad etishga asos bor.

Agar  bo‘lsa, taxminni qabul qilishga asos bor.  kritik nuqta avvaldan berilgan ahamiyatlilik darajasi  va erkinlik darajasi  lar asosida keltirilgan adabiyotlardagi taqsimot uchun ilovalardan yoki EXM da mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

**Bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi taxminni  tasdiqlash alomati yordamida tekshirish qoidasi**

1. Taxmin qilinayotgan taqsimot parametrlarining bahosi topiladi, ya‘ni  va  lar hisoblanadi.
2. Taqsimot parametrlari bahosi normal taqsimot zichlik funktsiyasiga qo‘yilib, zichlik funktsiyaning bahosi - topiladi.

 (3.3)

1. Tasodifiy miqdor X ning i-oraliqqa tushish ehtimoli  ni quyidagi

formula yordamida hisoblanadi:



 (3.4)

bu yerda - normal taqsimot funktsiya va uning qiymatlari adabiyotlarda keltirilgan ilovalardan yoki EXM da mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

1. Nazariy chastotalar  (n-tanlanma hajmi, - X tasodifiy miqdorning i-oraliqqa tushish ehtimoli) hisoblanadi.
2.  taxminni tekshirish uchun quyidagi statistika qiymatini hisoblaymiz:

 (3.5)

1. Avvaldan berilgan ahamiyatlilik darajasi  va erkinlik darajasi

 lar asosida keltirilgan adabiyotlardagi taqsimot uchun ilovalaridan yoki EXM dagi mavjud dasturlar paketidan foydalanib kritik nuqta  topiladi.

1. Agar  bo‘lsa, bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi  taxmin qabul qilinadi.

Agar  bo‘lsa, taxminni rad etishga asos

bor.

**Normal taqsimot o‘rtacha kvadratik chetlanishi ma’lum bo‘lganda, uning o‘rta qiymati haqidagi taxminni tekshirish**

Faraz qilaylik, bosh to‘plam  va  parametrli normal taqsimotga ega , bu yerda  -ma’lum, α ahamiyatlilik darajasida 

taxminni tekshirish kerak. Alternativ taxmin sifatida , ,  taxminlardan biri olingan bo′lsin.

Statistika sifatida quyidagi tasodifiy miqdor

 (3.6)

olinadi. H0 taxmin to‘g‘ri bo‘lganda Z tasodifiy miqdor standart normal taqsimotga (0 va 1 parametrli) ega .

Kritik nuqtani adabiyotlarda keltirilgan normal taqsimot funktsiya uchun ilovalardan yoki EXM dagi mavjud dasturlar paketidan foydalanib topiladi.

Agar alternativ taxmin  ko‘rinishda bo‘lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi chap tomonlama kritik sohadan foydalanamiz:

 (3.7)

Jadval faqat musbat qiymatlar uchun berilgan, shuning uchun

 (3.8)

Formulani e’tiborga olib, kritik nuqtani

 (3.9)

tenglikdan topamiz, u holda kritik soha

 (3.10)

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar alternativ taxmin  ko‘rinishda bo‘lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi o‘ng tomonlama kritik soha olinadi:

 (3.11)

kritik nuqtani topish uchun asosan quyidagi tenglikdan foydalaniladi

 (3.12)

Bu erdan kritik soha ko‘rinishini topamiz

 (3.13)

Agar alternativ taxmin  ko‘rinishda bo‘lsa, u holda quyidagi shartni bajaruvchi ikki tomonlama kritik soha olinadi:

 (3.14)

Mutlaq miqdor ta’rifiga ko‘ra

 (3.15)

(3.11) va (3.12) formulalarga ko‘ra jadvaldan foydalanish shartini olamiz:

 (3.16)

Shunday qilib bu holda kritik soha  ko‘rinishda bo‘ladi.

**15-MAVZU**

Korrelyasion va regression tahlil. Tasodifiy belgilar orasidagi funksional, statistik va korrelyatsion bogʻlanishlar. Korrelyatsion bogʻlanishning ikki asosiy masalasi. Shartli matematik kutilma, regressiya tenglamasi.

**Икки ўлчовли (бир факторли) регрессион модел.**

Бир факторли белги ҳоли учун регрессион муаммони формаллаштирамиз.

Айтайлик икки ўзгарувчининг қийматлари тўплами берилган бўлсин:  (тушунтирилувчи ўзгарувчи ёки натижа) ва  (тушунтирувчи ўзгарувчи ёки фактор). Ушбу ўзгарувчилар ўртасида объектив боғлиқлик мавжуд бўлсин:

 (1)

Ушбу тенгламани регрессиянинг “ҳаққоний” тенгламаси деб атаймиз. Кузатиш натижалари  асосида (1) “ҳаққоний” боғлиқликни “энг яхши” ифодалайдиган функцияни танлашимиз керак. Функцияни танлаш – функционал боғлиқлик кўринишини ва параметрлар қийматларини аниқлашдир. Функционал боғлиқлик кўринишини аниқлаш учун қуйидагилардан фойдаланиш мумкин:

1. Назарий тасаввур ва олдинги шунга ўхшаш тадқиқотлар тажрибаси;
2. График усул – корреляцион майдон ёки регрессиянинг эмпирик чизиғи асосида. Корреляцион майдон – (*х , у*) координаталар тизимидаги нуқтали график. Ҳар бир нуқта кузатиш бирлиги (*хi , уi*) га мос келади.
3. Бир нечта функцияларни танлаб, уларнинг ичидан регессия тенгламаси сифати кўрсаткичлари бўйича энг яхшисини танлаш мумкин.

Регрессия чизиқли ва чизиқсиз кўринишда бўлади.

Икки ўлчовли чизиқли регрессия модели қуйидаги кўринишга эга бўлади:

 (2)

 ўзгарувчи миқдори иккита ташкил этувчидан иборат:

1. тасодифий бўлмаган ташкил этувчи  ;
2. тасодифий ташкил этувчи .

Чизиқсиз регрессия икки синфга бўлинади: таҳлилга киритилган тушунтирувчи ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли бўлмаган, лекин баҳоланаётган параметрларга нисбатан чизиқли бўлган регрессия ва баҳоланаётган параметрларга нисбатан чизиқсиз бўлган регрессия.

Тушунтирувчи ўзгарувчилари бўйича чизиқсиз бўлган регрессиялар:

1. турли даражали полиномлар: 
2. тенгтомонлама гипербола: 

Баҳоланаётган параметрлари бўйича чизиқсиз бўлган регрессиялар:

1. даражали: 
2. кўрсаткичли: 
3. экспоненциал: 

Жуда кўп ҳолларда чизиқли кўринишдаги боғлиқлик ишлатилади. Чизиқли кўринишга бўлган эътибор шундаки параметрларнинг аниқ иқтисодий маънога эга эканлиги, ўзгарувчиларнинг чегараланган вариацияси ва кўп ҳолларда чизиқли бўлмаган боғлиқликларнинг ҳисоблашларни амалга ошириш учун чизиқли кўринишга келтирилишидир.

Тасодифий ташкил этувчи нинг мавжудлик сабаблари:

1) Натижага аҳамиятли даражада таъсир қилувчи “муҳим ” факторларнинг йўқлиги. Жуфт регрессия деярли ҳар доим катта соддалаштиришдир. Ҳақиқатда эса бошқа факторлар ҳам мавжуд бўлиб (2) формулада эътиборга олинмаган бўлиши мумкин. Бу факторларни ўлчашни иложи бўлмаслиги мумкин (масалан, психологик). Бу факторларни ўлчашни иложи бўлганда ҳам улар натижага жуда суст таъсир қилганлиги учун уларни моделда эътиборга олмаймиз. Ундан ташқари, улар жуда “муҳим” факторлар бўлиб, биз уларни тажрибамиз камлиги учун эътиборга олмаган бўлишимиз мумкин. Буларнинг ҳаммаси кузатилаётган маълумотлар  тўғри чизиқдан ташқарида ётишига олиб келади;

2) Моделни нотўғри функционал спецификациялаш;

3) Ўзгарувчиларни ўлчашдаги хатолик.

Моделдаги регрессия коэффициенти  нинг ишораси боғлиқлик йўналишини кўрсатади. Агар  бўлса, боғлиқлик тўғри, агар  бўлса, боғлиқлик тескари бўлади.  миқдор  фактор ўзининг ўлчов бирлигида бир бирликка ўзгарганда  натижа ўрта ҳисобда қанча миқдорга ўзгаришини кўрсатади. Моделда  параметр қиймати формал равишда *х=*0 да  нинг ўртача қиймати. Агар фактор нол қийматга эга эмас ёки нолга тенг бўлиши мумкин бўлмаса, у ҳолда юқоридаги трактовка маънога эмас. Икки ўлчовли регрессион модел матрица кўринишида қуйидагича бўлади.



бу ерда,

Y - кузатилаётган натижавий белги қийматларининг ()

ўлчамдаги тасодифий вектор-устуни;

* -* кузатилаётган фактор белги қийматларининг () ўлчамдаги

матрица. Қўшимча фактор *х*0  регрессия тенгламасидаги озод

ҳад  нинг мавжудлиги билан боғлиқ. Озод ҳад учун *х*0

факторнинг қиймати бирга тенг деб қабул қилиш қабул

қилинган.

*b -* Баҳоланиши керак бўлган модел параметрларининг ()

ўлчамли ўзгарувчилари вектор-устунидир.

*u -*  () ўлчамли кузатиш хатоликлари тасодифий вектор-

устунидир.

Мисол кўриб чиқамиз. 20 ишчининг иш ҳаққи ва ёши ҳақида маълумотлар берилган бўлсин. Ишчининг иш ҳаққи регрессион модели қурилсин. Бунда - *i-*ишчининг иш ҳаққи ($); *xi - i-*ишчининг ёши (ёш), *i*=1; *n.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  | *xi* | *i* |  | *xi* |
| 1 | 300 | 29 | 11 | 400 | 47 |
| 2 | 400 | 40 | 12 | 250 | 28 |
| 3 | 300 | 36 | 13 | 350 | 30 |
| 4 | 320 | 32 | 14 | 200 | 25 |
| 5 | 200 | 23 | 15 | 400 | 48 |
| 6 | 350 | 45 | 16 | 220 | 30 |
| 7 | 350 | 38 | 17 | 320 | 40 |
| 8 | 400 | 40 | 18 | 390 | 40 |
| 9 | 380 | 50 | 19 | 360 | 38 |
| 10 | 400 | 47 | 20 | 260 | 29 |

Бизнинг мисолда  параметр ишчининг ёши 1 ёшга ошганда унинг иш ҳаққи ўрта ҳисобда неча долларга ўзгаршини билдиради.  параметр маънога эга эмас, чунки ишчининг ёши нолга тенг бўлиши мукин эмас.

**Анъанавий энг кичик квадратлар усули – ЭККУ.**

Функционал боғлиқлик кўриниши  аниқлангандан сўнг, модел параметрлари баҳоланади. Моделнинг энг яхши параметрларини аниқлаш учун, қуйидагича критериялардан фойдаланиш мумкин:

1. Кузатилаётган боғлиқли ўзгарувчи қийматларнинг функция бўйича ҳисобланган қийматлардан четланишлари квадратлари йиғиндиси: - энг кичик квадратлар усули (ЭККУ);
2. Кузатилаётган боғлиқли ўзгарувчи қийматларнинг функция бўйича ҳисобланган қийматлардан четланишлари модуллари йиғиндиси: ;
3. , бу ерда *g* – “ўлчов” бўлиб, *i –*кузатиш учун четланиш функционалга киради.

*S –* функционални минималлаштирадиган параметр қийматлари оптимал бўлади.

Чизиқли жуфт регрессия моделидаги параметрларини баҳолаш учун кўпинча ЭККУ қўлланилади. Ушбу усулга кўра параметрларнинг баҳолари сифатида функционални минималлаштирадиган  ва  миқдорлар олинади. Ушбу функция  ва  параметрларга боғлиқ бўлган функция бўлганлиги учун , функциянинг минимумини топиш учун ушбу параметрлари бўйича хусусий ҳосила олиб нолга тенглаштирамиз.

Ушбу тизимни соддалаштириб,  ва  параметрларни топамиз.

; 

- фактор белги дисперсияси;

 - натижавий белги ўртача қиймати;

 - фактор белги ўрта қиймати;

 - факторни натижага кўпайтмасининг ўртача қиймати.

Регрессия тенгламаси параметрлари ҳисобланиши тўғрилигини йиғиндилар тенглиги орқали текширилади (бунда ҳисоблашлар яхлитланиши ҳисобига қандайдир фарқ бўлиши мумкин). Жуда кўп тадқиқотларнинг натижалари шуни тасдиқлайдики, *х* ўзгарувчи олдидаги параметрлар сонидан 6-7 баравар кўп бўлиши керак. Бу тасдиқ 7 тадан кам кузатишга эга бўлиб, чизиқли регрессияни қидириш, умуман маънога эга эмас.

Юқорида келтирилган мисол учун иш ҳаққи ва ишчилар ёши маълумотлари бўйича чизиқли жуфт регрессия параметрларини ЭККУ ёрдамида баҳолаймиз.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Кузатиш № | *х –* *ишчи ёши, (ёш)* | *y – бир ойлик иш ҳаққи, $* | *x2* | *x\*y* | *y2* |
| 1 | 29 | 300 | 841 | 8700 | 90000 |
| 2 | 40 | 400 | 1600 | 16000 | 160000 |
| 3 | 36 | 300 | 1296 | 10800 | 90000 |
| 4 | 32 | 320 | 1024 | 10240 | 102400 |
| 5 | 23 | 200 | 529 | 4600 | 40000 |
| 6 | 45 | 350 | 2025 | 15750 | 122500 |
| 7 | 38 | 350 | 1444 | 13300 | 122500 |
| 8 | 40 | 400 | 1600 | 16000 | 160000 |
| 9 | 50 | 380 | 2500 | 19000 | 144400 |
| 10 | 47 | 400 | 2209 | 18800 | 160000 |
| 11 | 47 | 400 | 2209 | 18800 | 160000 |
| 12 | 28 | 250 | 784 | 7000 | 62500 |
| 13 | 30 | 350 | 900 | 10500 | 122500 |
| 14 | 25 | 200 | 625 | 5000 | 40000 |
| 15 | 48 | 400 | 2304 | 19200 | 160000 |
| 16 | 30 | 220 | 900 | 6600 | 48400 |
| 17 | 40 | 320 | 1600 | 12800 | 102400 |
| 18 | 40 | 390 | 1600 | 15600 | 152100 |
| 19 | 38 | 360 | 1444 | 13680 | 129600 |
| 20 | 29 | 260 | 841 | 7540 | 67600 |
| Устун бўйича йиғинди | 735 | 6550 | 28275 | 249910 | 2236900 |
| Ўртача қиймат | 36,75 | 327,5 | 1413,75 | 12495,5 | 111845 |





Уҳолда иш ҳаққининг ишчи ёшига боғлиқлигини ифодалайдиган чизиқли жуфт регрессия қуйидаги кўринишда бўлади.



Яъни ишчи ёши 1 ёшга ошганда унинг иш ҳаққи ўрта ҳисобда 7.278$ ошишини билдиради.